Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД
- из математке -

Конике, кубике и кретање тачака

Ученик:
Урош Цоловић IVд

Ментор:
др Лука Милићевић

Београд, јун 2021.

Садржај

1

Увод

У овом раду ћемо се осврнути на неке технике које нису широко познате, увести их постепено, доказати кључне теореме, као и дати примене. Друго поглавље се бави увођењем неких основних појмова потребних за наставак рада. Већ у трећем поглављу крећемо са првим методом, преклапајућим пресликавањима односно једном страном кретања тачака. Четврто поглавље је посвећено коникама. Овде такође показујемо и другу страну кретања тачака, такозвани Штајнеров начин генерисања коника. У петом поглављу улазимо у најгенералнији метод кретања тачака, такозвани полиномски метод. Остала поглавља се баве кубикама, специфично, шесто уводи битну теорему, док у седмој и осмој глави посматрамо значајне примене кубика.

2

Основни појмови

Дефиниција 2.0.1. Дворазмера 4 колинеарне тачке је дефинисана као $(A, B; C, D) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$, где су дужи оријентисане. Четворку тачака зовемо хармонијском уколико је њихова дворазмера једнака -1.

Дефиниција 2.0.2. За две праве l_1, l_2 и тачку P која се не налази ни на једној од њих дефинишемо бијективно пресликавање као: $X \in l_1 \mapsto PX \cap l_2$. Ово пресликавање зовемо перспективност. Лако се проверава да перспективност чува дворазмеру. Композиција више перспективности је пројективност.

Дефиниција 2.0.3. За четири праве a_1, a_2, a_3, a_4 које пролазе кроз тачку P дефинишемо дворазмеру као $(a_1, a_2; a_3, a_4) = (A_1, A_2; A_3, A_4)$ где је $A_i = l \cap a_i$, за неку насумичну праву l не паралелну са a_i.

Дефиниција 2.0.4. Поларно пресликавање у односу на круг ω, са центром O, јесте пресликавање које мења пол и његову полару. Пол неке праве l јесте инверз подножја нормале из O на l при инверзији око ω, а l је његова полара. Сада није тешко дефинисати поларно пресликавање за конике, заиста довољно је применити пројективну трансформацију која дати круг шаље у произвољну конику.

Дефиниција 2.0.5. Пројективна раван се састоји од скупа линија, скупа правих, и релације између правих и тачака, које задовољавају:

1. за сваке две различите тачке постоји тачно једна права инцидентна са обе
2. за сваке две различите праве постоји тачно једна тачка инцидентна са обе
3. постоје четири тачке такве да ниједна права није инцидентна са више од две

3

Линеарност, поклапајућа пресликавања

У овом делу ћемо причати о најједноставнијој примени кретања тачака, такозваним поклапајућим пресликавањима.

Дефиниција 3.0.1. Пројективно пресликавање је пресликавање $f : \xi_1 \mapsto \xi_2$, где су ξ_1 и ξ_2 конике, праве или праменови правих, тако да f чува дворазмеру.

Теорема 3.1. Дворазмера је јединствена, тј. $(A, B; C, D) = (A, B; C, E)$ имплицира $D = E$.

Доказ: Лако следи из дефиниције. Приметимо да је пројективно пресликавање бијекција као и да је композиција два пројективна пресликавања пројективно пресликавање. Ево је сада главна теорема за ову главу.

Теорема 3.2. Нека $f, g : \xi_1 \mapsto \xi_2$ два пројективна пресликавања таква да су им и домен и кодомен исти. Тада је $f \equiv g$ ако и само ако $f = g$ у три тачке домена.

Доказ: Смер ако је тривијалан зато се фокусирајмо на смер само ако. Нека је

$$f(A) = g(A), f(B) = g(B), f(C) = g(C)$$

и нека $D \in \xi_1$. Тада важи

$$(f(A), f(B); f(C), f(D)) = (A, B; C, D) = (g(A), g(B); g(C), g(D))$$

Одакле из јединствености дворазмера следи $f(D) = g(D)$ и тиме је доказ завршен.
Пре него наставимо даље, погледајмо пример пресликавања која чувају дворазмеру, и нотацију у овом случају. За почетак, нека је дата права l и тачка M

на њој и тачка N ван ње. Пресликавање са l у прамен правих кроз N ћемо означавати са $M \mapsto MN$. Ова је скраћена нотација, она би заправо требала овако да гласи:

Нека $f : l \mapsto \xi$ пресликавање са праве l у прамен правих ξ кроз N.

Видимо зашто је непрактично писати овако јер за неке дуже композиције пресликавања би нам требало неколико функција. Објаснимо сада неформално шта значи $M \mapsto MN$, пресликавање које чува дворазмеру. За неке четири тачке $M_1, M_2, M_3, M_4 \in l$, доделимо им четири праве NM_1, NM_2, NM_3, NM_4. Сада нам је потребно да се ова дворазмера не мења тј. $(M_1, M_2; M_3, M_4) = N(M_1, M_2; M_3, M_4)$. У почетку је лакше размишљати на овај начин о методи кретања тачкака, наиме као пресликавања која неким четворкама тачака (правих) додељује неке друге тачке (праве), него као о тачки која се креће. Други приступ ће доћи након неког времена, постаће интуитиван.

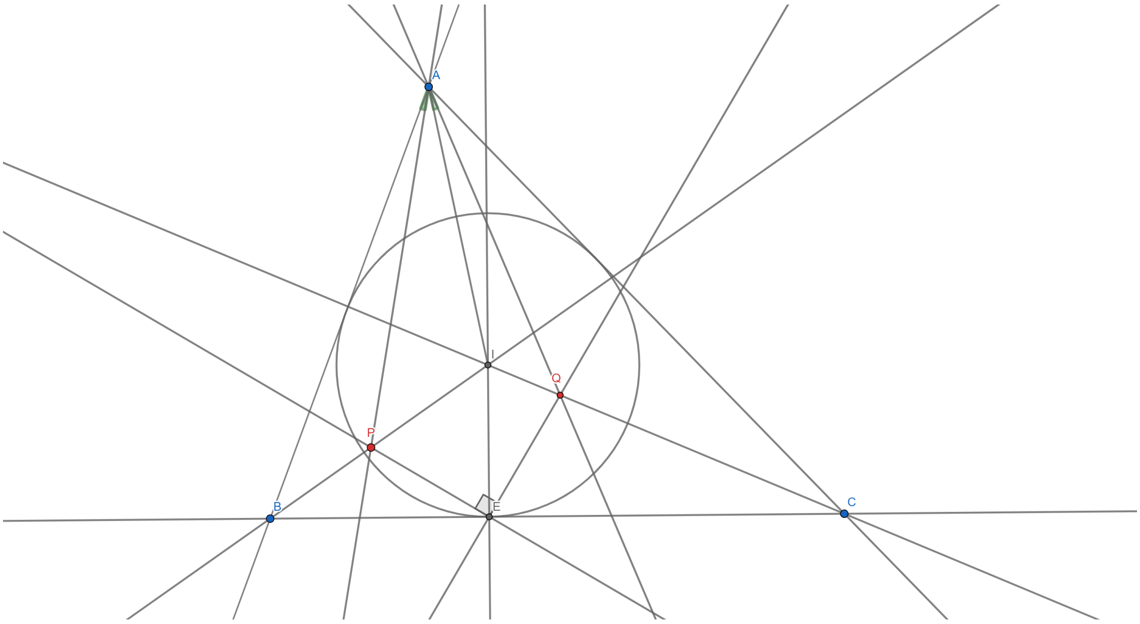
Неки од примера пројективних пресликавања су:

- За дату праву l и тачку P (не на l) пресликавање са l на ξ_P (прамен правих кроз P), у ознаци $X \mapsto PX$
- За дату конику γ и тачку $P \in \gamma$, пресликавање са l на γ дато са $X \mapsto PX \cap \gamma$
- За дату конику γ и било коју тачку P, пресликавање са γ на γ дато са $X \mapsto PX \cap \gamma \neq X$
- Инверзија круга или праве

Сада покажимо примену на неколико задатака.

Пример 1 (СМО1 2018)**.** Кружница уписана у има центар у тачки I и додирује страницу BC у тачки D. На дужима BI и CI одабране су тачке P и Q, редом, такве да важи $\angle BAC = 2\angle PAQ$. Доказати да важи $\angle PDQ = 90$.

Доказ: Нека је $= 2\alpha$. Посматрамо пресликавање $f : BI \mapsto CI$ које шаље тачку $X \in BI$ у тачку Y на CI тако да је $\angle XAY = \alpha$. Ово пресликавање је пројективно јер је $X \mapsto AX \mapsto AY \mapsto Y$. Пресликавање $\mapsto AX \mapsto AY$ је пројективно јер је ово ротација. Слично дефинишимо $g : BI \mapsto CI$ која шаље тачку $P \in BI$ у тачку $Q \in CI$ тако да $= 90$. g је слично као малопре пројективна. Задатак нам каже да се f и g поклапају. Сада због теореме 1 довољно је наћи 3 тачке у којима се поклапају. $P = A$, $P = I$ и када је P подножје симетрале $\angle BDI$. Пошто трврђење тривијално важи у ова 3 случаја, доказ је завршен.



Пример 1

Пример 2 (ИМО 2010/2)**.** Нека је I центар уписане кружнице, а Γ описана кружница ABC. Нека права AI сече Γ у тачкама A и D. Нека је E на Γ, а F тачка дужи BC тако да је $\angle BAF = \angle CAE$ Нека је G средиште дужи IF. Доказати да пресек правих DG и EI припада Γ.

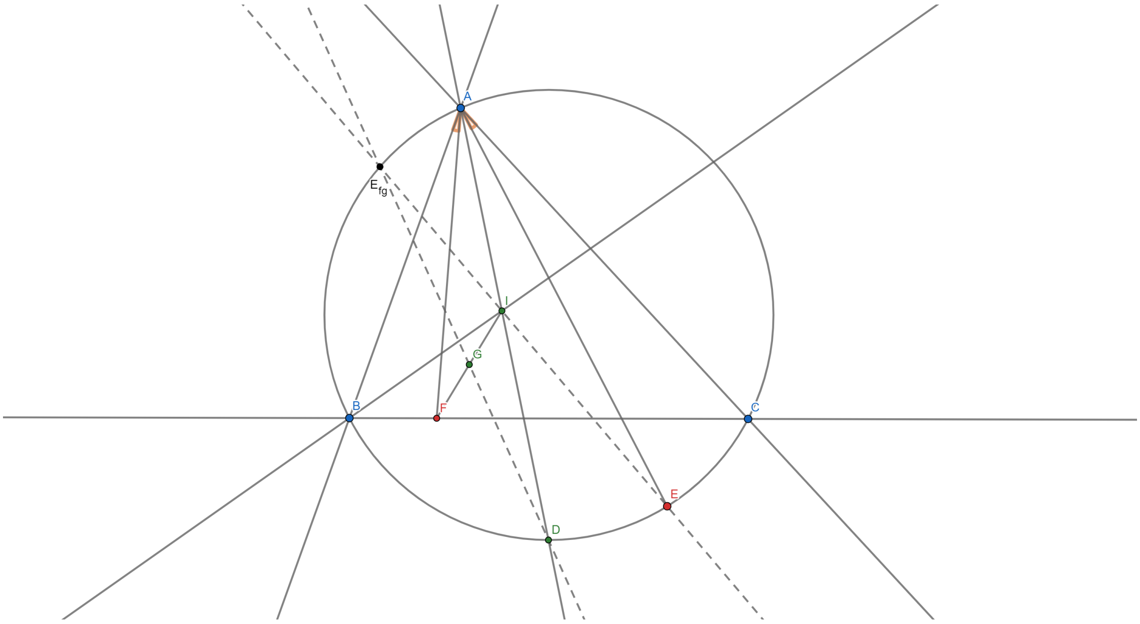
Доказ: Дефинишимо пресликавање $f : \Gamma \mapsto \Gamma$ које шаље тачку $E \in \Gamma$ у $IE \cap \Gamma = E_f$. Дефинишимо пресликавање $g : \Gamma \mapsto \Gamma$ које шаље тачку E у тачку E_g на следећи начин.

$$E \mapsto AE \mapsto AF \mapsto F \mapsto G \mapsto DG \mapsto DG \cap \Gamma$$

Лако се проверава да су оба пресликавања пројективна. Зато је потребно проверити $E_f = E_g$ у 3 специјална случаја. $E = B, C, D$, сваки од ових случајева је тривијалан и тиме је доказ завршен.

Као што је раније напоменуто, да би се стекла интуиција о овом методу је најбоље размишљати као о композицији пројективних пресликавања, а тек после као о тачкама које се крећу. Заправо тачке које се крећу су оне које индукују пресликавања, тј. помоћу њих правимо ова пресликавања. На примеру 2 бисмо рекли да се тачка E креће пројективно по кругу, и онда преко ње дефинисали 2 пројективна пресликавања која желимо да се поклопе.

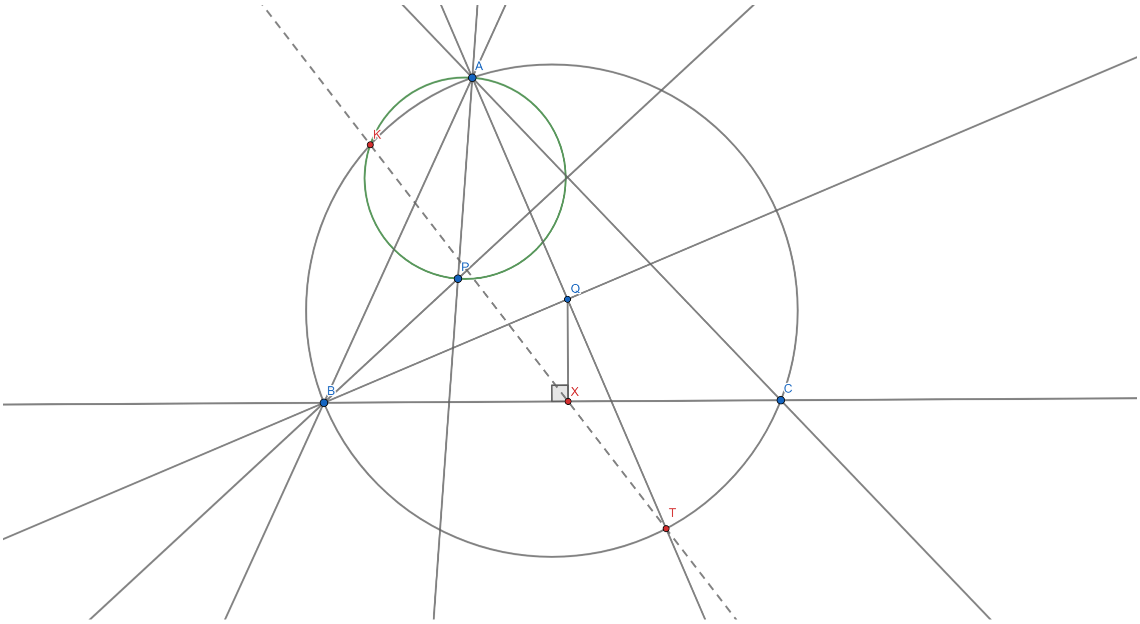
Како је инверзија Мебијусова трансформација, она чува дворазмеру. Инверзија ће нам помоћи када су у питању кругови. Покажимо ово на конкретном примеру.



Пример 2

Пример 3. Нека су P, Q парови изогоналних коњугата у ΔABC и X подножје нормале из Q на BC. Круг пречника PA, назван ω, сече (ABC) у тачки $K \neq A$. AQ сече (ABC) у тачки $T \neq A$. Тада су K, X, T колинеарне.

Доказ: Нека се тачка Q креће по AT, тада се P креће по правој l изогоналној AT у $\angle A$. За почетак $Q \mapsto X \mapsto K_1$ је пројективно пресликавање где је $K_1 = TX \cap (ABC)$. Са друге стране $Q \mapsto P$ је пројективно јер је ово заправо само пресликавање преко симетрале $\angle B$. Остаје још показати да је пресликавање $P \mapsto K_2$ пројективно, где је $A \neq K_2 = \omega \cap (ABC)$. Применимо инверзију у A. Након инверзије P', инверз тачке P, се креће по фиксној правој l. ω се слика у l_1, где је l_1 нормала на праву l у тачки P. Круг (ABC) је послат у праву $B'C'$. Али сада је $P' \mapsto l_1 \mapsto l_1 \cap B'C' = K_2'$ где је K_2' инверз тачке K_2. Због тога што инверзија чува дворазмеру следи да је $P \mapsto P' \mapsto K_2' \mapsto K_2$ пројективно пресликавање одакле следи да је потребно у три случаја тачке Q проверити једнакост $K_1 = K_2$. Читаоцу остављамо да заврши доказ.



Пример 3

4

Конике

4.1 Увод

Конике, или криве другог реда, су обично посматране у аналитичкој геометрији. У овом поглављу ћемо покушати да покажеммо да конике имају и геометријске особине које је могуће доказати елементарно.

4.2 Оптичке особине

Следеће особине коника су познате: елипса је г.м.т. [1] таквих да је збир растојања фиксан у односу на две тачке, хипербола је г.м.т. таквих да је апсолутна разлика растојања од две тачке фиксна, парабола је г.м.т тачака које имају исто растојање од праве и тачке. Покажимо прво следећу лему.

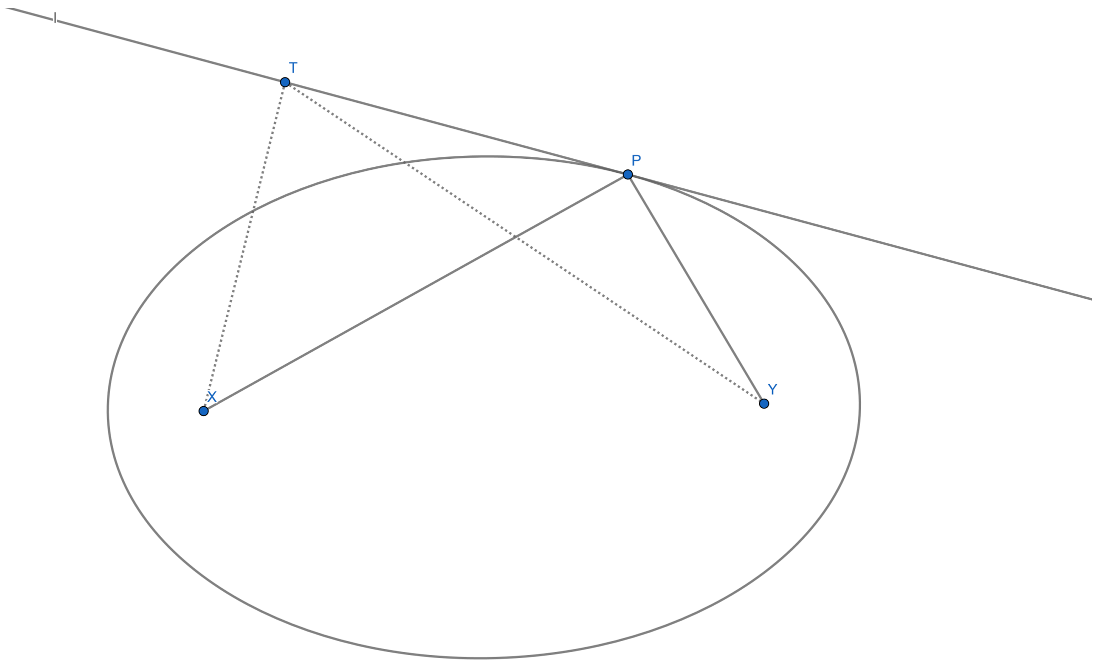
Лема 4.2.1. Нека је l права, X и Y тачке са исте стране l. Тада тачка P на l која минимизира збир $|PX + PY|$ је таква да супротно оријентисани углови које праве PX и PY граде са l су једнаки.

Доказ: Након пресликавања X преко l добијамо тачку X'. Сада важи $PX = PX'$ односно тражимо минимум $PY + PX'$. Тачка P која задовољава ово је $YX' \cap l$, и она очигледно задовољава услов са угловима.

На сличан начин можемо показати и следеће две леме.

Лема 4.2.2. Нека су тачке X и Y са различитих страна праве l. Тада се максимум од $|PX - PY|$ достиже у тачки P која задовољава да PX и PY граде исте углове са l.

[1] геометријско место тачака



Оптичка особина елипсе

Лема 4.2.3. Нека су дате 2 праве l, l' и тачка X која није на њима. Тада тачка $P \in l$ која задовољава да је апсолутна вредност разлике растојања тачке P од l' и дужи PX максимална, задовољава и $PX \perp l'$.

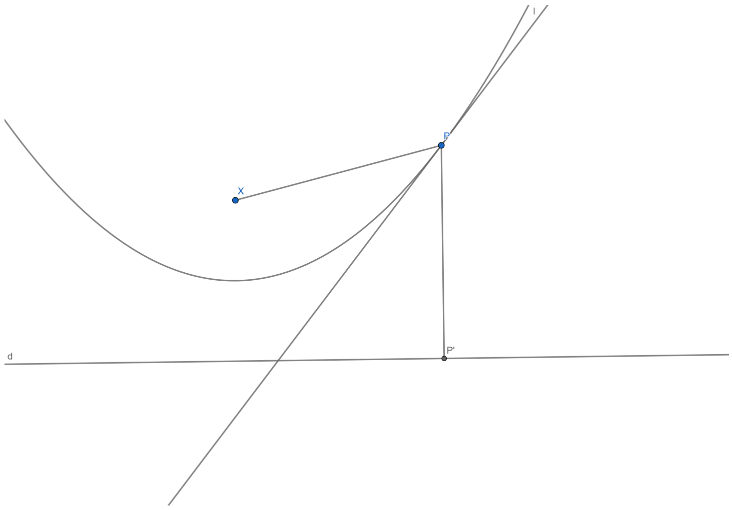
Сада ћемо показати једну од најважнијих особина коника.

Теорема 4.1 (Оптичка особина елипсе)**.** Нека је l права која додирује елипсу ω у тачки P и нека су фокуси[2] елипсе X и Y. Тада је l спољашња симетрала $\sphericalangle XPY$.

Доказ: Нека је тачка T на l. Тада је $XT + YT > XP + YP$. Пошто ово важи за произвољну тачку на l тврђење следи из 4.2.1.

Теорема 4.2 (Оптичка особина параболе)**.** Нека је l тангента на параболу у тачки P. Нека је P' подножје нормале из P на d (директрису), и X фокус параболе. Тада је l симетрала $\sphericalangle XPP'$.

[2]жиже, фокалне тачке, енг. focus



Оптичка особина параболе

Доказ: Пошто тачка P задовољава да је $\mid PX - PP' \mid$ минимално, готови смо због 4.2.2.

Теорема 4.3 (Оптичка особина хиперболе)**.** Ако права l додирује хиперболу, чији су фокуси X и Y, у тачки P, тада је l симетрала $\sphericalangle XPY$.

Доказ: Следи непосредно из 4.2.3.

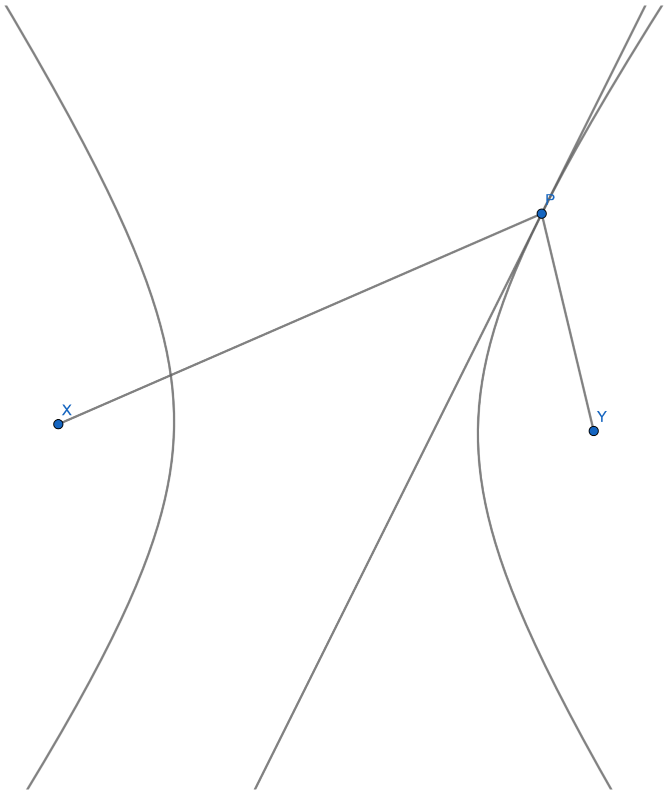
Последица 1. Посматрамо фамилију конфокалних елипси и хипербола. Тада се било која елипса и било која парабола из те фамилије секу под правим углом.

Доказ: Нека су фокуси X, Y. тврђење следи из тога да су спољашња и унутрашња симетрала истог угла нормалне, као и из оптичких особина хиперболе и елипсе.

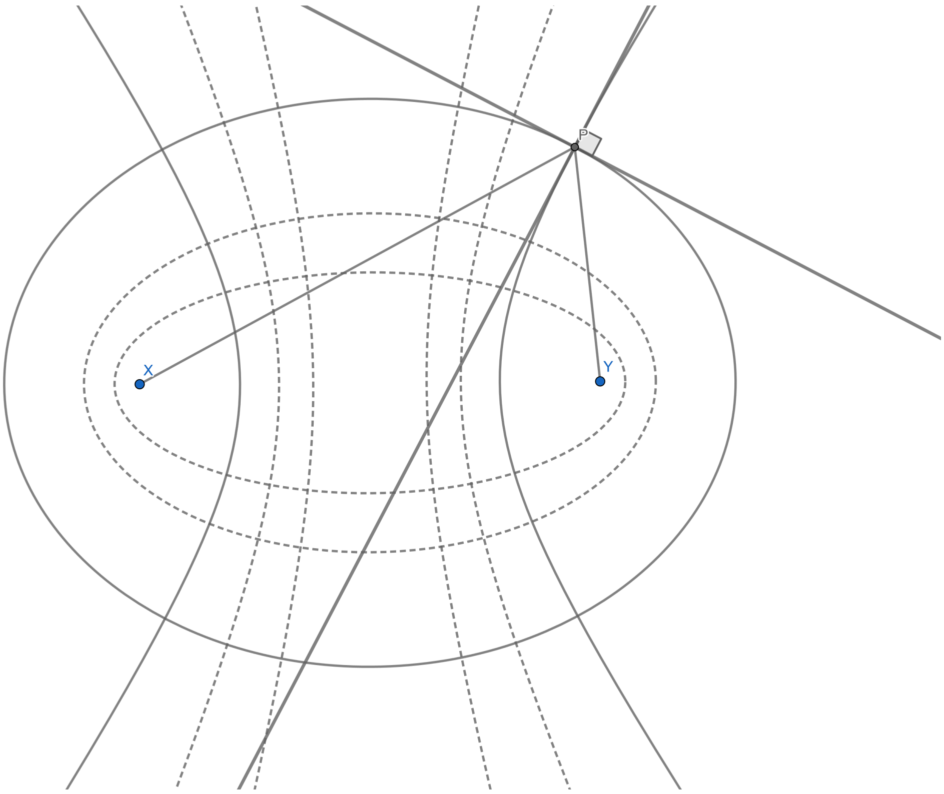
Последица 2. Нека PQ сечица која пролази кроз фокус X елипсе ω, и R пресек тангенти у P и Q. Тада је R центар споља приписаног круга ΔPQY (где је Y други фокус) и X је додирна тачка приписаног круга са PQ.

Доказ: Из оптичке особине елипсе следи да су PR и QR симетрале спољашњих углова па први део следи. Због особина елипсе X дели ΔPQY на 2 дела једнаких обима, а таква тачка је јединствена. Додирна тачка приписаног круга има такву особину па је тврђење доказано.

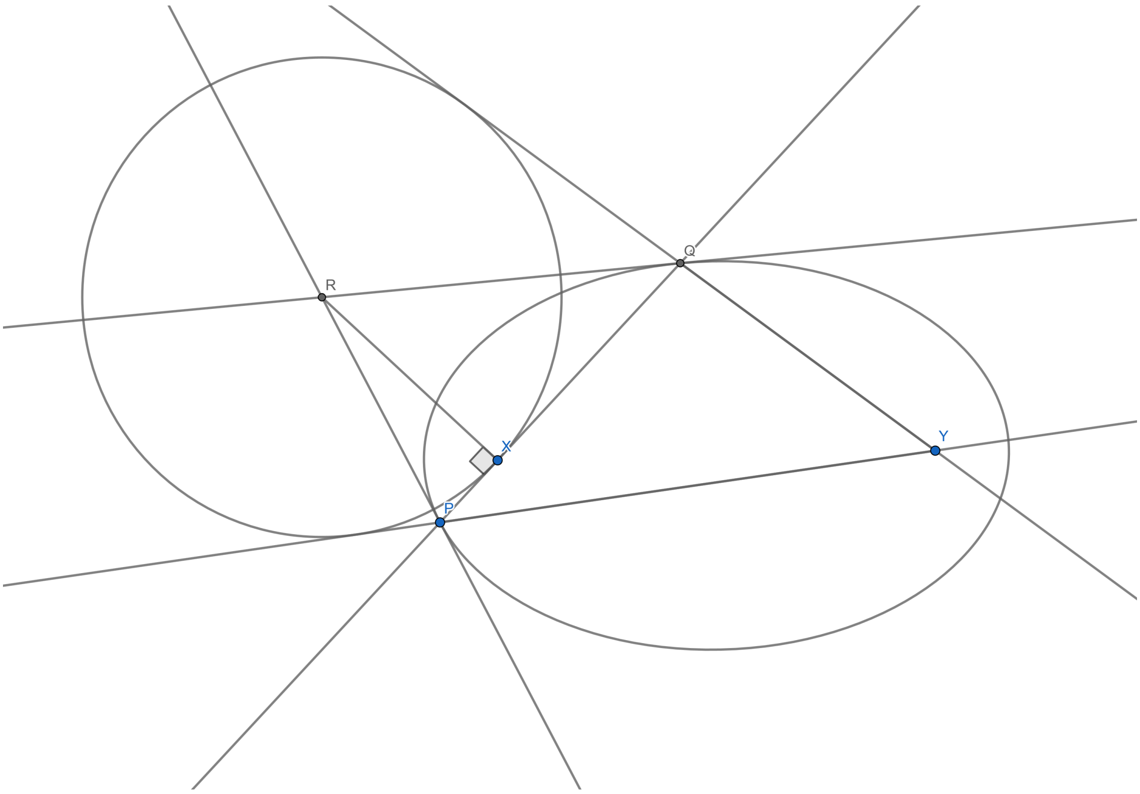
Напомена: 2 важи и за хиперболу само је потребно приписани круг заменити уписаним.



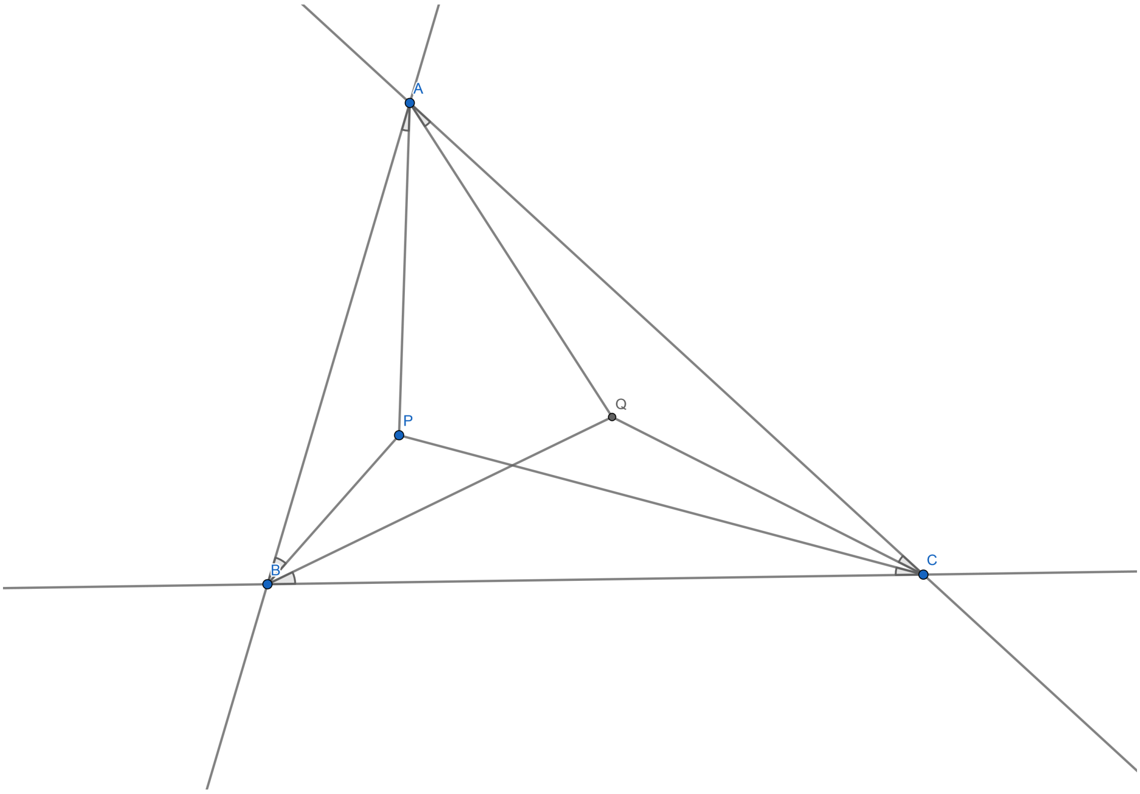
Оптичка особина хиперболе



Конфокалне елипсе и хиперболе



Елипса и приписани круг



Изогонални коњугати

4.3 Изогоналне особине коника

Подсетимо се тога шта су изогонални коњугати.

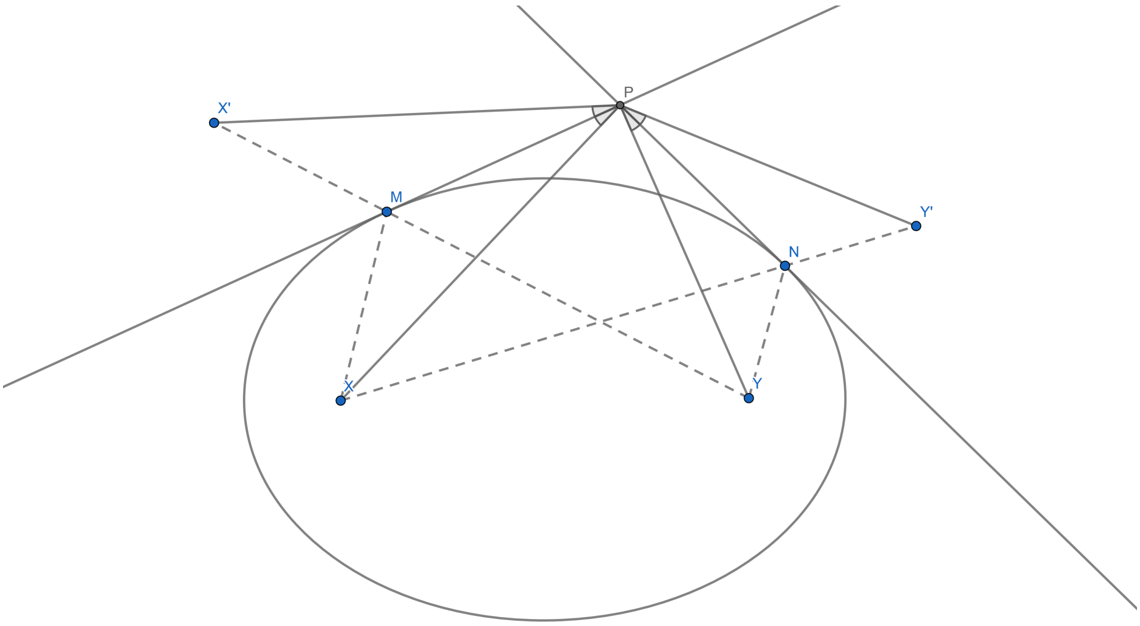
Лема 4.3.1 (изогонално спрегнуте тачке)**.** Нека су у ΔABC дате тачке P и Q такве да важи $\sphericalangle BCP = \sphericalangle ACQ$, $\sphericalangle ABP = \sphericalangle CBQ$. Тада важи и $\sphericalangle BAP = \sphericalangle CAP$.

Покажимо сада неколико теорема.

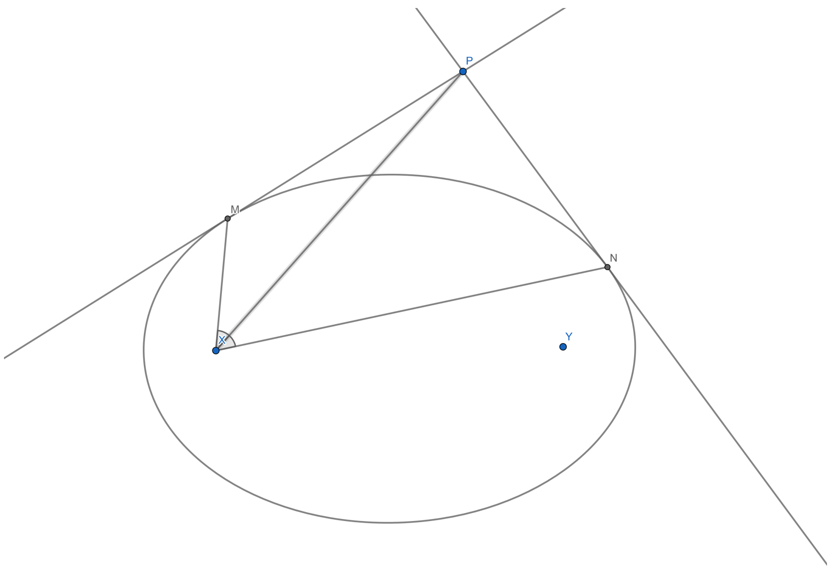
Теорема 4.4. Нека је тачка P ван елипсе ω и нека су додирне тачке тангента из P на ω назване M, N. Тада је $\sphericalangle XPM = \sphericalangle YPN$, где су X и Y фокуси елипсе.

Доказ: Пресликамо тачке X и Y преко PM и PN тим редом, тако добијемо X' и Y'. Из оптичке особине добијамо да су Y, M, X' колинеарне, као и X, N, Y'. Видимо да важи $YX' = YM + XM = YN + XN = XY'$. Сада следи да су $\Delta PX'Y$ и $\Delta PXY'$ подударни (ССС). Одавде лаким рачуном углова добијамо резултат. Напомена: Сличну особину има и хипербола.

Теорема 4.5. Иста нотација као у теореми 1. Тада је XP симетрала $\sphericalangle MXN$.



Слика уз 4.4



Слика уз 4.5

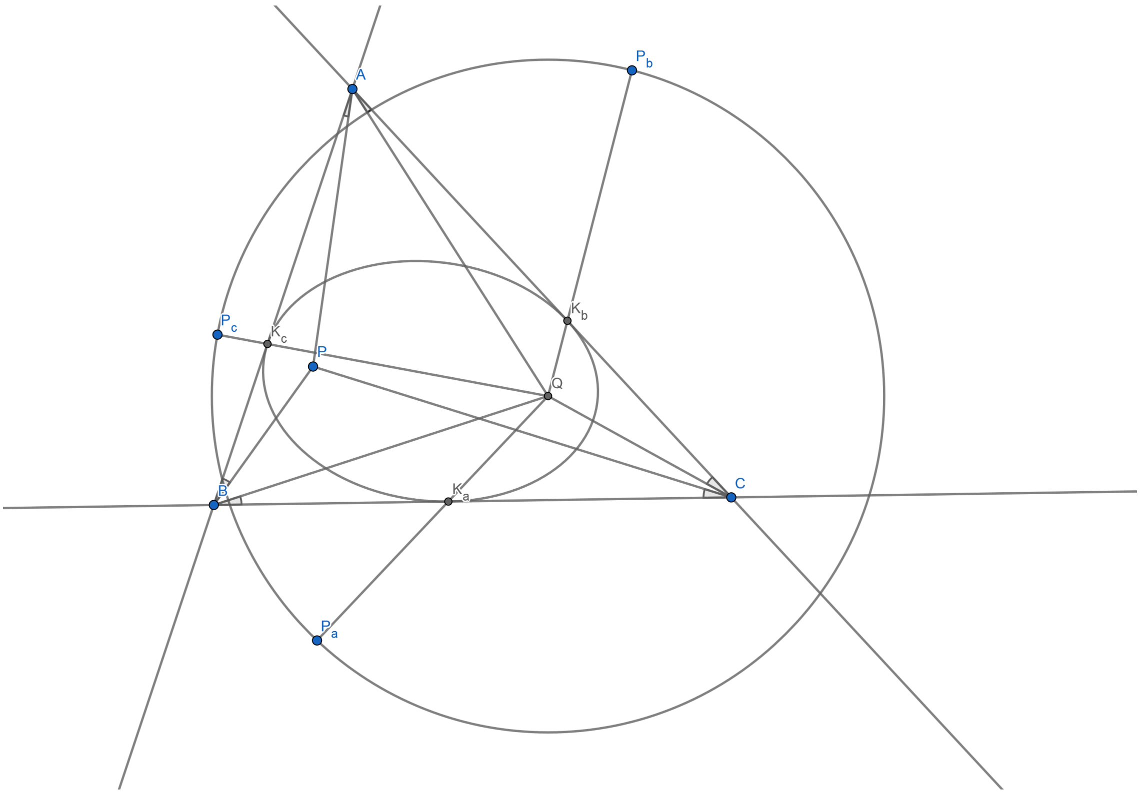
Доказ: Тврђење следи из подударности $\Delta PX'Y$ и $\Delta PXY'$, и лаког рачуна углова.

Ако су неке две тачке изогонално спрегнуте у ΔABC тада су оне фокуси неке конике која додирује странице троугла. Ова коника може бити и хипербола и елипса у зависности од положаја тачака.
Нека су сада P и Q изогонално спрегнуте и налазе се унутар ΔABC (без умањења општости). Скицирајмо доказ да постоји елипса са фокусима P и Q која додирује странице. Нека су P_a, P_b, P_c рефлексије тачке P у односу на BC, CA, AB тим редом. Познато је да је Q центар описаног круга $\Delta P_aP_bP_c$. Дефинишемо $QP_a \cap BC = K_a$. Из рачуна углова видимо да је $\sphericalangle PK_aB = \sphericalangle QK_aC$, и одавде следи тврђење.

Доказ би слично ишао и за хиперболу.

Важи да сваки пар изогоналних тачака представља пар фокуса неке конике уписане у троугао, а важи и обрнуто. Тврђење од малопре може лако да се генерализује на многоуглове, наиме ако постоји коника која додирује све странице многоугла онда су фокуси те конике изогонални коњугати у односу на тај многоугао. Касније ћемо напоменути да постоји јединствена коника која додирује датих 5 правих у општем положају, па следи да у петоуглу постоји јединствени пар тачака које су изогонално спрегнуте. У четвороуглу тачке које задовољавају да за њих постоји изогонални коњугат све леже на кубици.

Напомена: изогонални коњугат праве је коника кроз темена троугла.



Изогоналне тачке су фокуси уписаних коника

4.4 Специјалне особине Параболе

Теорема 4.6. ΔABC је описан око параболе. Тада фокус те параболе лежи на кругу описаном око ΔABC.

Доказ: Користићемо следећу помоћну лему чији доказ изостављамо (вежба за читаоца).

Лема 4.4.1. Ако пресликамо фокус параболе преко тангенте, он ће лежати на директриси.

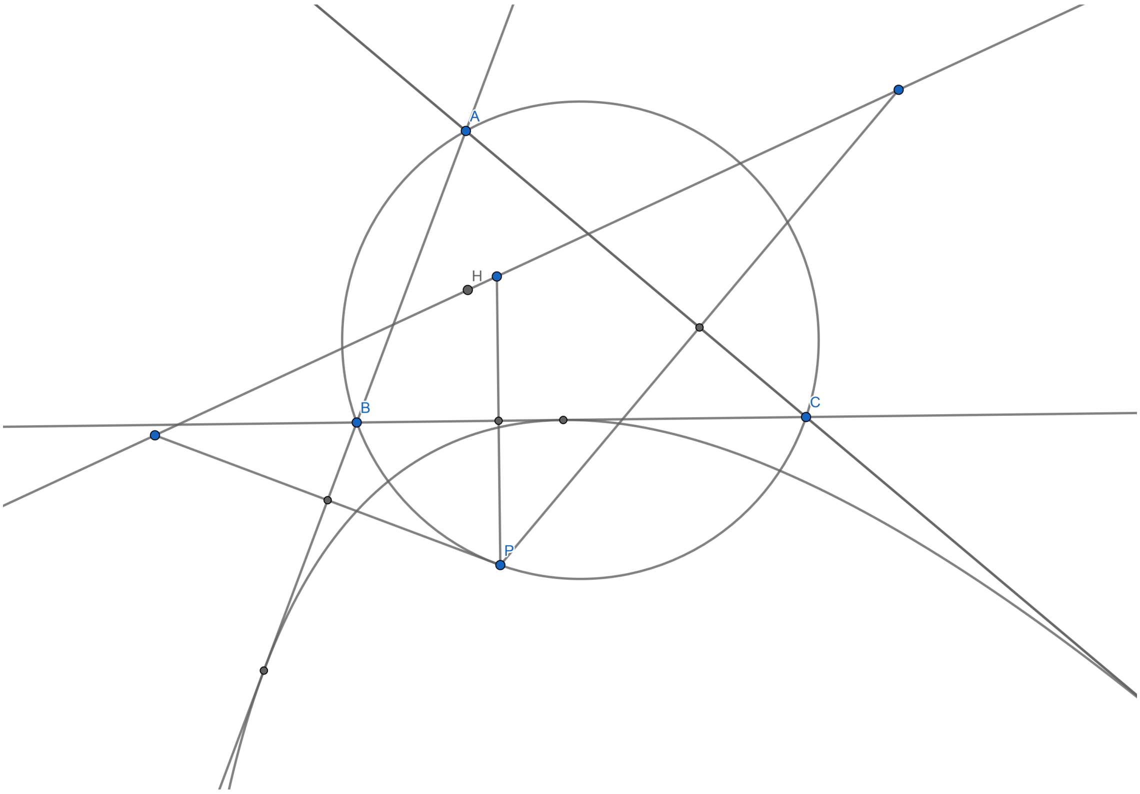
Сада из леме следи да ако пресликамо фокус F параболе преко страница троугла, слике ће лежати на правој. Након хомотетије у F са коефијентом $\frac{1}{2}$, видимо да и подножја нормала из F на странице леже на правој. Тврђење сада следи из Симсонове теореме.

Теорема 4.7. Ортоцентар троугла чије странице додирују параболу лежи на њеној директриси.

Доказ: Следећа лема ће нам помоћи.

Лема 4.4.2. Ако је P тачка на кругу описаном око ΔABC, тада Симсонова права тачке P полови дуж PH где је H ортоцентар ΔABC.

Из ове леме и 4.6 доказ непосредно следи. (доказ леме је само рачун углова, зато је изостављен)



4.5 Пројективне конике

У овом делу ћемо описати неке особине коника које су битне за следећих пар поглавља. Наиме, од сад прелазимо у пројективну раван. Иако већ строго дефинисана, објаснимо сада неформално. Она функционише тако што у еуклидској равни, једној групи паралелних правих (рецимо све паралелне правој a) доделимо ,,тачку у бесконачности". То је тачка кроз коју све ове паралелне праве пролазе (као и a). Пошто постоји бесконачно овакви тачака, а треба их негде све сместити, додата је "права у бесконачности", таква да се све тачке у бесконачности налазе на њој. Сада смо направили раван у којој се сваке две праве секу!

Неке врсте трансформација

У еуклидској равни смо имали афине трансформације, оне су композиција ротације, транслације и скалирања. Овом врстом трансформацијом је било који троугао могуће послати у било који троугао, али не и било који четвороугао у било који који четвороугао, баш зато што афине трансформације чувају паралелност, стога оне чувају праву у бесконачности. Сада имамо могућност да праву у бесконачности третирамо као било коју другу праву. То радимо пројективним трансформацијама. Оне чувају колинеарност тачака и конкурентност правих, као и тангентност, али не пуно више ствари. Најважнија ствар коју чувају је дворазмера. Постоји и већ поменута поларна трансформација у односу на круг, она мења сваки пол његовом поларом и обрнуто. Због овога свака теорема у пројективној равни има дуал. Нпр. дуал Паскалове теореме је Брианчонова теорема, и обрнуто.

Неке дефиниције

Дефиниција 4.5.1. Инволуција је пресликавање $f : \xi \mapsto \xi$, где је ξ и ξ_2 коника или права, тако да f чува дворазмеру, и $f(f(X)) = X$ за $X \in \xi$.

Дефиниција 4.5.2. : Нека је дат троугао ΔABC и тачка D. Нека је $AD \cap BC = D_a$, $BD \cap AC = D_b$, $CD \cap AB = D_c$. Тада је $\Delta D_a D_b D_c$ Чевин троугао тачке D у односу на ΔABC. Чевин круг тачке D у односу на троугао ΔABC је круг описан око $\Delta D_a D_b D_c$.

Дефиниција 4.5.3. Нека је дат троугао ΔABC и тачка D. Нека је подножје нормале из D на BC означено са D_a, аналогно дефинишемо D_b и D_c. Тада је $\Delta D_a D_b D_c$ педални троугао тачке D у односу на ΔABC. Педални круг тачке D у односу на троугао ΔABC је круг описан око $\Delta D_a D_b D_c$.

Пар особина "пројективних"коника

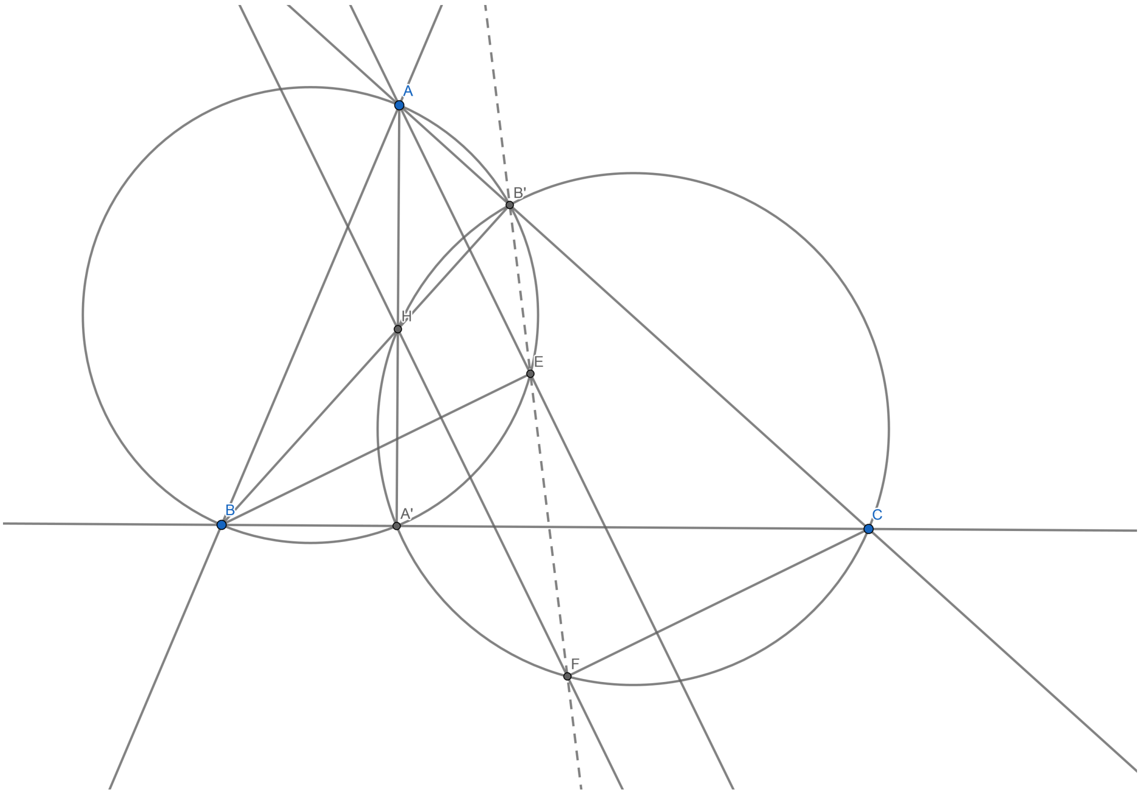
Хипербола има 2 тачке у бесконачности, парабола једну, а елипса ниједну. Све конике су у пројективном смислу исте, зато што постоји пројективна трасформација која слика било које две конике једну у другу. Коника је одређена са 5 тачака, тј. за било којих пет тачака у општем положају постоји јединствена коника која пролази кроз њих. Дуал овога је да постоји јединствена коника која додирује пет датих правих.

Напомена: ако у комплексној пројективној равни фиксирамо центар круга и пустимо да полупрецник тежи бесконачности, лимес овог круга су 2 тачке, $(1, \pm i, 0)$

4.6 Карактеристике хипербола

Теорема 4.8. Хипербола описана око ΔABC је једнакокрака ако и само ако пролази кроз H, ортоцентар ΔABC.

Доказ: Сада прелазимо у пројективну раван. Нека су тачке X и Y у бесконачности и одговарају праменовима нормалних правих. Кроз B и C провучемо праве паралелне правама кроз X („спојимо"A са X) , а кроз A и H провучемо



праве паралелне правама кроз Y. Нека је EF једна дијагонала правоугаоника који граде ове четири праве (BX, CX, AY, HY), и нека је B' подножје висине из B на AC, аналогно за A и BC. Из рачунања углова видимо да су $CFA'HB'$ и $BA'HEA$ су конциклични четвороуглови, а одавде следи да E, F, B' леже на правој. Из обрнуте Паскалове теореме на $BYCAXH$ следи тврђење.

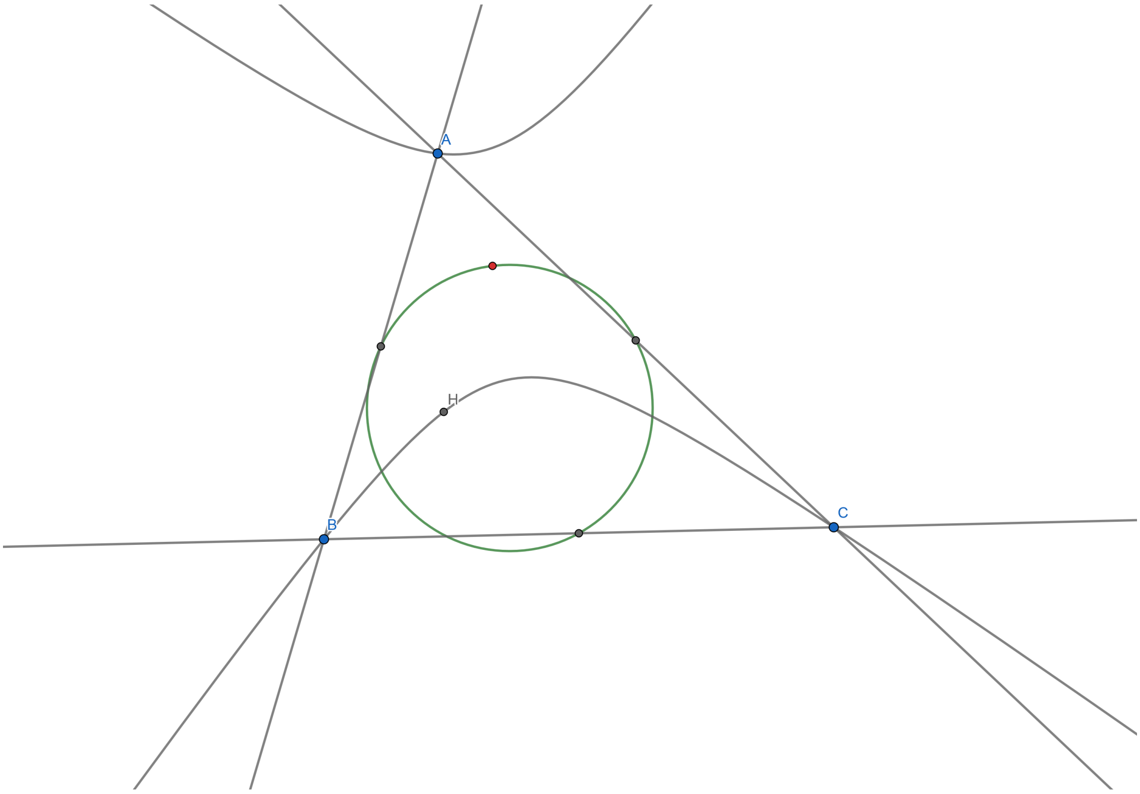
За други смер приметимо да је $ABCH$ неконвексан четвороугао па је коника ω кроз $ABCH$ хипербола. Нека је X једна тачка у бесконачности на ω. Ако је Y тачка која одговара прамену нормалном на праве кроз X тада и она мора припадати ω, чиме је тврђење у потпуности доказано.

Теорема 4.9. Центри свих једнакокраких хипербола које пролазе A, B, C леже на Ојлеровом кругу.

У доказу ове теореме бисмо додали четврти пресек хиперболе са кругом, и тврђење би следило из пар особина паралелограма.

Теорема 4.10. Нека једнакокрака хипербола пролази кроз тачке A, B, C, D ($D \neq H$). Тада описани круг Чевиног троугла тачке D пролази кроз центар хиперболе.

Доказ: Ово тврђење је последица следеће леме:



Центри једнакокраких хипербола леже на Ојлеровом кругу

Лема 4.6.1. Дат је ΔABC и тачка P различита од ортоцентра. Тада центар уписаног и центри кругова приписаних Чевином троуглу тачке P сви леже на једнакокракој хиперболи кроз $ABCP$.

Овде сада имамо примену једног лепог принципа. Пошто задатак има доста ,,синтетичких"особина (симетрале углова, нормале..) он није лак. Да бисмо се решили ових проблема, наћи ћемо генералније тврђење које је тотално пројективно, али када се некој од тачака додели нека специјална особина (нпр. нека тачка је центар уписаног круга) тада добијамо задатак. Тврђења која су тотално пројективна су углавном лака помоћу пројективних трансформација. Наравно, генерализације није увек лако наћи. Ево је сада генерализација за 4.6.1.

Лема 4.6.2. Дата су 2 троугла $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Нека се B_1C_1 и B_2C_2 секу у A'; B' и C' су слично дефинисане. Ако су парови троуглова $A'B'C'$ и $A_1B_1C_1$, $A'B'C'$ и $A_2B_2C_2$ перспективни, тада $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2, A_2$ леже на коници, где су D_i центри перспективности.

Доказ: Пројективном трансформацијом пошаљемо $A_1B_1C_1D_1$ у квадрат, одавде 4.6.2 одмах следи.

За 4.6.1, нека је $A'B'C'$ Чевин троугао тачке P, I' центар уписаног, а I'_a центар приписаног круга наспрам A' (остали слично дефинисани). $\Delta A'B'C'$ и $\Delta I'_aI'_bI'_c$ задовољавају 4.6.2, а пошто је I ортоцентар од $\Delta I_aI_bI_c$ следи да једнакокрака хипербола пролази кроз $I'_a, I'_b, I'_c, I', A, B, C, P$.

Коначно 4.10 следи зато што је Чевин круг тачке P заправо Ојлеров круг $\Delta I'_aI'_bI'_c$. Следећу теорему наводимо без доказа, иако је није лако показати.

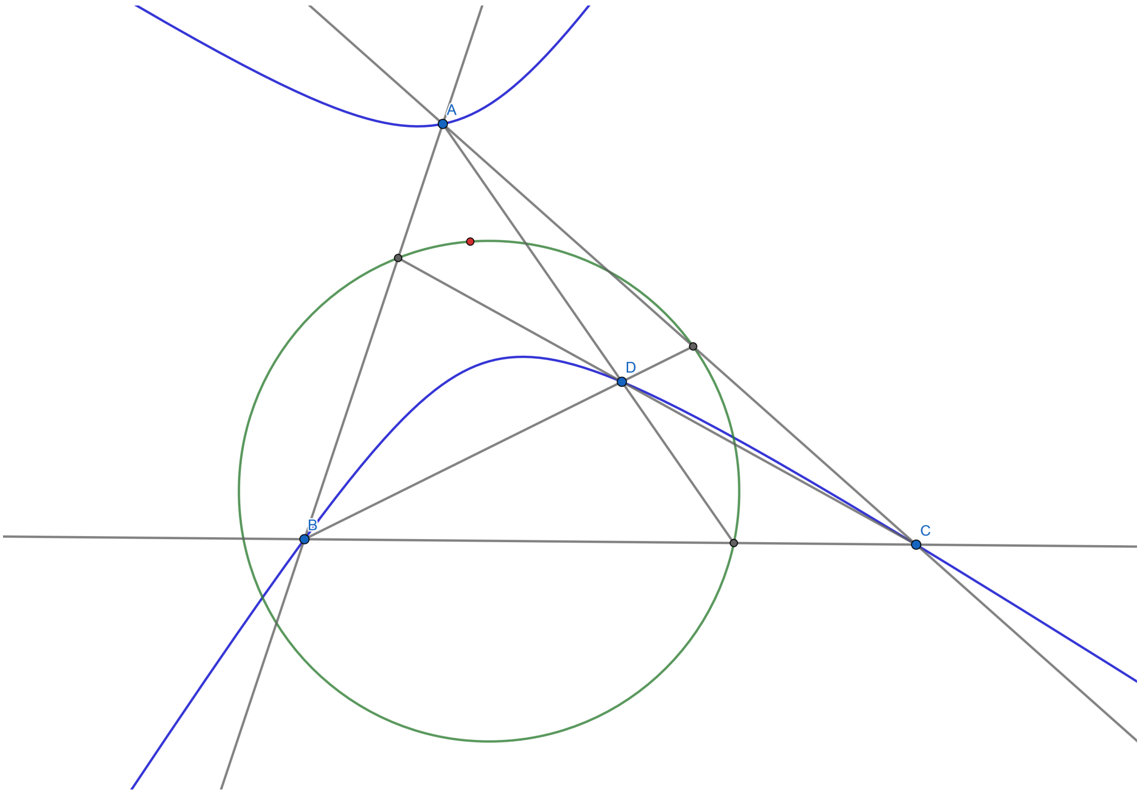
Теорема 4.11. Ако једнакокрака хипербола пролази кроз A, B, C, D, тада педални круг тачке D у односу на ΔABC пролази кроз центар те хиперболе.

Доказ би користио теорему 4.8 у неколико троуглова.

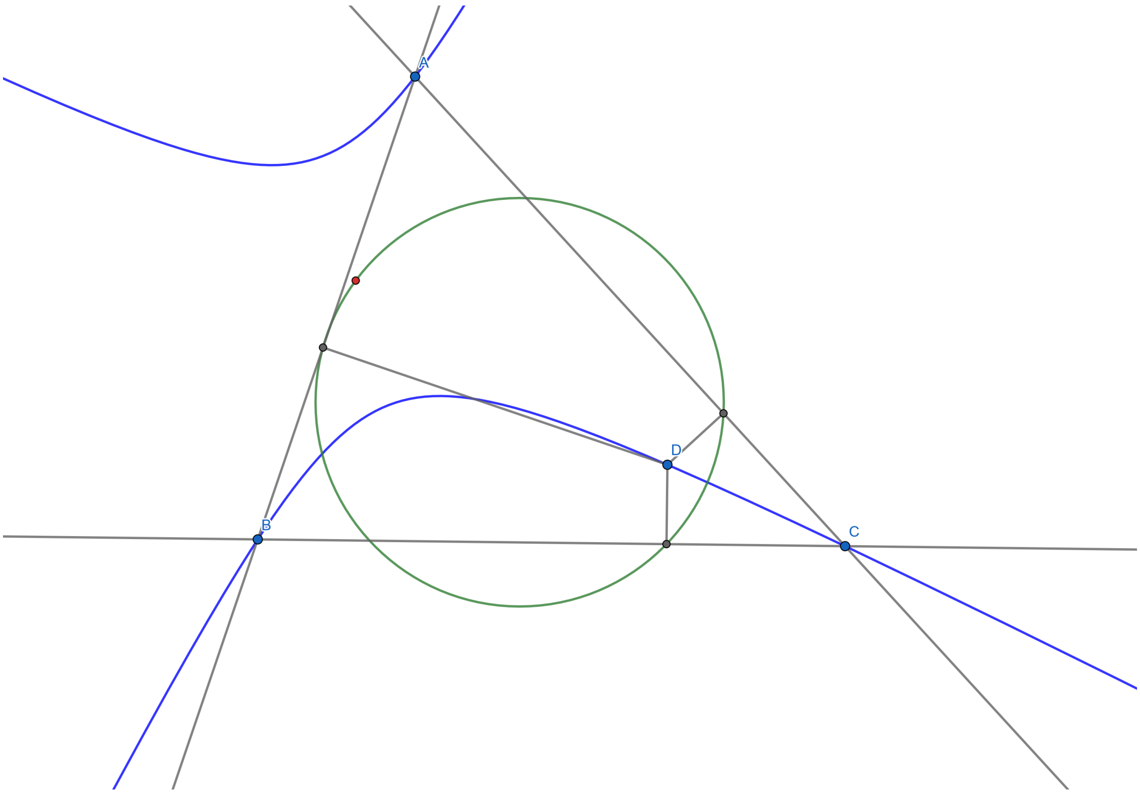
На крају ћемо видети теорему која обухвата све до сад поменуте технике:

Теорема 4.12 (Генерализована Фојербахова тачка)**.** Нека права l пролази кроз O центар описане кружнице ΔABC. Тада педални кругови свих тачака $P \in l$ пролазе кроз фиксну тачку F_e, генерализовану Фојербахову тачку.

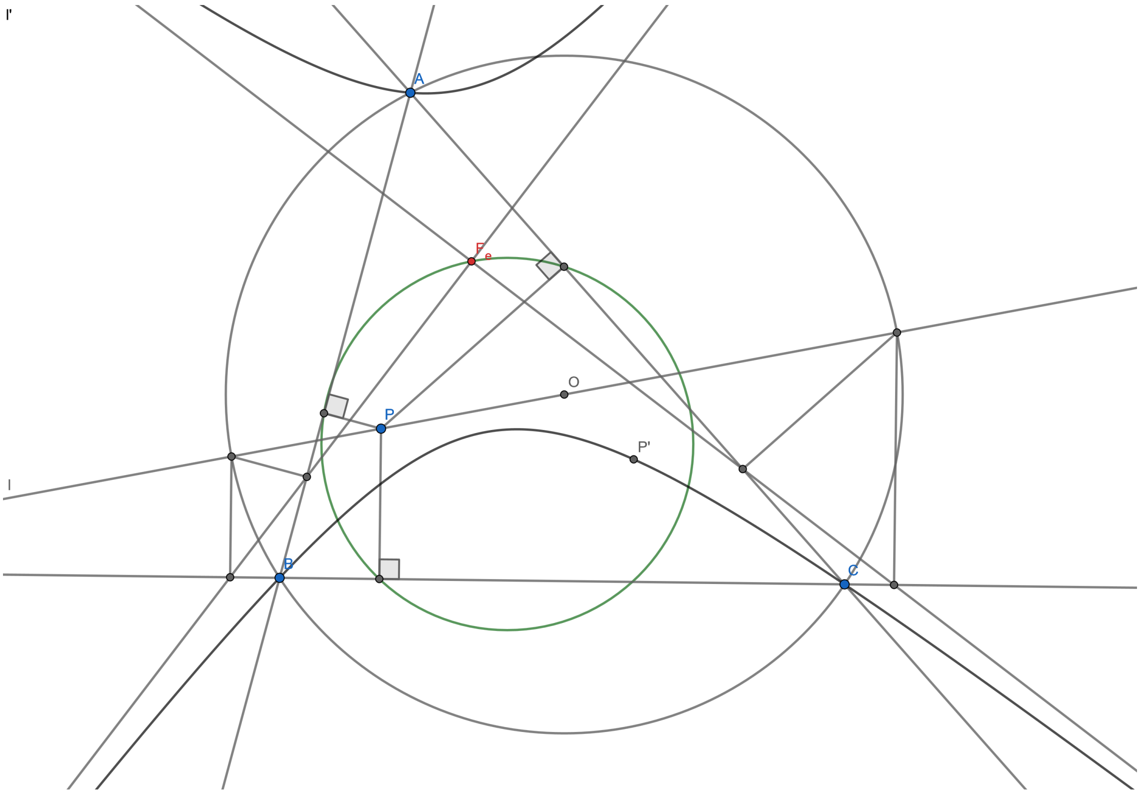
Доказ: Нека је изогонални коњугат од P назван P'. Нека се тачка P креће по l линеарно, тада се P' креће по коници кроз A, B, C, и та коника пролази кроз изогонални коњугат од O (зато што се P' креће по изогоналним коњугатима са l), што је тачка H, ортоцентар ΔABC , односно P' се креће по једнакокракој хиперболи. Познато је да изогонални коњугати деле педални круг, па је педални круг од P заправо педални круг од P'. Али пошто се P' креће по једнакокракој хиперболи из теореме 4.11 следи да она пролази кроз центар хиперболе, тачку F_e. Ова тачка је фиксна зато што је одређена правом l.



Центри једнакокраких хипербола на Чевином кругу



Центри једнакокраких хипербола на педалном кругу



Генерализована Фојербахова тачка

Напомена: F_e се може лако наћи као пресек Симсонових правих тачака M, N, где су M и N дефинисане као пресек l са кругом описаним око ΔABC.

4.7 Пројективно генерисање кривих другог реда, Штајнерова коника

Теорема 4.13 (Штајнерова коника)**.** Нека је $f : \xi_1 \mapsto \xi_2$ пројективно пресликавање са прамена правих кроз тачку A на прамен правих кроз тачку B. Важи да је:

- а)$f(AB) = AB$ ако и само ако постоји права c такву да за свако $a \in \xi_1$,$a \neq AB$ важи да $a \cap f(a) \in c$.

- б)$f(AB) \neq AB$ ако и само ако постоји коника $\mathcal{C}$ која пролази кроз A и B таква да за свако $a \in \xi_1$ важи да $a \cap f(a) \in \mathcal{C}$.

Доказ: Ако постоји права c за а) или постоји коника $\mathcal{C}$ тврђење тривијално следи, зато се фокусирајмо на други смер.

- Нека $p, q, r \in \xi_1$, и нека је $p \cap f(p) = P$,$q \cap f(q) = Q$. Праву PQ назовимо c, и $AB \cap c = S$. Сада видимо :

  $$(P, Q; r \cap c, S) = (p, q; r, AB) = (f(p), f(q); f(r), f(AB)) = (P, Q; f(q) \cap c, S)$$

  одакле следи тврђење.

- Нека $p, q, r, s \in \xi_1$ и нека је $p \cap f(p) = P$,$q \cap f(q) = Q$,$r \cap f(r) = R$. Постоји јединствена коника $\mathcal{C}$ кроз A, B, P, Q, R. Овде је битно напоменути да су све ове тачке неколинеарне, јер би у супротном $f(AB) = AB$. Сада следи:

  $$(P, Q; R, s \cap \mathcal{C}) = (p, q; r, s) = (f(p), f(q); f(q)f(r) = (P, Q; R, f(s) \cap \mathcal{C})$$

  одакле следи тврђење.

Поларном трансформацијом добијамо дуално тврђење.

Теорема 4.14 (Дуал Штајнерове конике)**.**

Нека је $f : \xi_1 \mapsto \xi_2$ пројективно пресликавање са праве на праву и $\xi_1 \cap \xi_2 = A$. Важи да је:

- $f(A) = A$ ако и само ако постоји тачка C таква да за свако $X \in \xi_1$,$X \neq A$ важи $Xf(X) = C$.

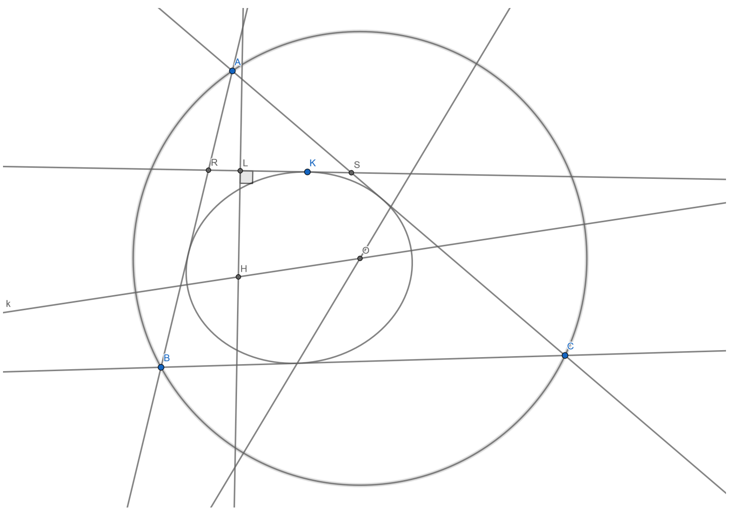
- $f(A) \neq A$ ако и само постоји коника $\mathcal{C}$ таква да за свако $X \in \xi_1$ важи да $Xf(X)$ додирује $\mathcal{C}$.

Сада ћемо видети примену Штајнерове конике на олимпијском задатку коме је другачије веома тешко прићи, али приступ коникама је природан и води нетешком решењу.

Задатак 1. Дат је оштроугли ΔABC са Ојлеровом правом k. Тачке M и N су рефлексије тачака B и C преко k. P је произвољна тачка на k. Нека је $PM \cap AC = E$, и $PN \cap AB = F$. H је ортоцентар ΔABC. S је осносиметрична тачка од H у односу на EF. Тада се S налази на кругу описаном око ΔABC.

Доказ: Нека се P креће линеарно по k. Пресликавање $f : k \mapsto AC$ дато са $f(P) = E$ је пројективно зато што је то само перспективност. Аналогно и за $g : k \mapsto AB$. Али сада је и $h : AC \mapsto AB$ дато са $f(E) = F$ пројективно јер је заправо $h = g \circ f^{-1}$. Сада због теореме 2 (очигледно $f(A) \neq A$ јер би иначе P, M, A, N биле колинеарне што је апсурдно). Следи да постоји $\mathcal{C}$ којој су AB и AC тангенте, и која додирује EF за свако P. Истражимо сада мало боље особине $\mathcal{C}$. За $P = MN \cap BC$ се EF поклапа са MN, а за $P = MC \cap BN$ се EF поклапа са BC.

Треба нам коника која додирује AB, AC, BC, MN која очигледно мора имати везе са k. Прво што нам падне на памет (након читања овог дела) је елипса $\mathcal{C}'$ са фокусима O и H. Да видимо да ли тврђење задатка важи ако би $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$. Нека је RS тангента на $\mathcal{C}'$ у тачки K, и L подножје нормале из H на RS. Како су O и H фокуси елипсе која додирује све странице ΔARS, следи да су они изогонално спрегнути у ΔARS, односно да деле педални круг, али педални круг од O је Ојлеров круг, па L лежи на Ојлеровом кругу. И на крају након хомотетије коефицијента 2, и центром у H, видимо да тврђење задатка важи за $\mathcal{C}'$. Значи остаје још да покажемо $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$. Коника одређена са 5 правих које додирује, па остаје пронађи још једну праву. Али за $P = k \cap AB$ видимо да $\mathcal{C}'$ додирује EF и тиме је доказ завршен.



Ево једне занимљиве и неочекиване примене.

Теорема 4.15. Нека су дате 2 праве a и b. Претпоставимо да је $f : a \mapsto b$ пројективно пресликавање такво да $f(\infty_a) = \infty_b$, где су ово бесконачне тачке на a, b тим редом. Тада је за било које фиксиране оријентисане углове α, β, г.м.т. X таквих да је $\sphericalangle(XA, a) = \alpha$ и $\sphericalangle(Xf(A), b) = \beta$ за $A \in a$ заправо права.

Доказ: Нека су l_α и l_β праве такве да $(l_\alpha, a) = \alpha$, $(l_\beta, b) = \beta$, и нека су $\infty_\alpha, \infty_\beta$ њихове бесконачне тачке. Тада је $\infty_a X \mapsto A \mapsto f(A) \mapsto \infty_\beta X$ је пројективно, а како права у бесконачности остаје фиксирана, доказ је готов из Штајнерове конике.

5

Генерално кретање тачака, полиномски метод

Шта бисмо радили када бисмо имали 2 групе тачака, таквих да су у свакој групи оне пројективно везане али између њих не постоји пројективно пресликавање? На ово питање одговорићемо у овом поглављу.

Дефиниција 5.0.1. За тачку A кажемо да има хомогене координате (x, y, z) ако :

1. $z \neq 0$, тачка A има картезијанске координате $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$

2. $z = 0$, тада је A тачка у бесконачности која се налази на правој која пролази кроз $(0, 0)$ и (x, y)

Из дефиниције следи $(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$.

Дефиниција 5.0.2. За полином кажемо да је хомоген уколико $P(x, y, z) = P(\lambda x, \lambda y, \lambda z)\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$, тј. збир експонената у сваком моному је исти.

Дефиниција 5.0.3. Геометријско место тачака $(x, y, z) \in \mathbb{RP}^2$ се назива пројективном кривом уколико $P(x, y, z) = 0$ за неки хомоген полином P.

Покажимо сада везу између пројективних кривих и обичних кривих. Нека је $Q(x, y)$ крива степена d у картезиској равни. Хомогени полином степена d који одговара полиному Q јесте полином $P(x, y, z) = z^d Q(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$. Лако се види да је процес реверзибилан.

Пример 4. Једначина праве дата је са $ax + by + cz = 0$, а јединичног круга са $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Приметимо да поларна трансформација у односу на јединични круг шаље тачку (x, y, z) у праву $ax + by + cz = 0$. Дефинишимо сада кључни део овог поглавља.

Дефиниција 5.0.4. Нека је $f : t \mapsto (P(t), Q(t), R(t))$ пресликавање из $R \cup \{\infty\} \mapsto \mathbb{RP}^2$, где је НЗД$[P(t), Q(t), R(t)] = 1$. Ово пресликавање зовемо покретном тачком. Слику у $t = \infty$ дефинишемо помоћу непрекидности у $\mathbb{RP}^2$.

Други начин за дефинисање слике у бесконачности тачке A као

$$\lim_{t \mapsto \infty} \left(\frac{P(t)}{x^{\deg A}}, \frac{Q(t)}{x^{\deg A}}, \frac{R(t)}{x^{\deg A}} \right)$$

Дефиниција 5.0.5. Степеном покретне тачке $A = (P(t), Q(t), R(t))$ називамо $\max(\deg P, \deg Q, \deg R)$, и пишемо $\deg A$.

Кажемо такође и да се тачка A креће по полиномима (P, Q, R) ако $A = (P(t), Q(t), R(t))$. Слично можемо дефинисати покретну праву l као $aP(t) + bQ(t) + cR(t) = 0$, такође пишемо $\deg l = \max(\deg P, \deg Q, \deg R)$. Напоменимо неколико битних лема које ће нам требати касније.

Лема 5.0.1. Нека су ξ_1 и ξ_2 две праве или 2 конике, и нека је $f : \xi_1 \mapsto \xi_2$ пројективно пресликавање. Тада постоји пројективна трансформација која слика ξ_1 у ξ_2 тако да је $A \in \xi_1$ послата у $f(A)$.

Лема 5.0.2. Свака пројективна трансформација је облика

$$(x', y', z') = (x, y, z)A$$

За инверзибилну матрицу A.

Теорема 5.1 (Лема о кретању тачака)**.** Нека су A и B две покретне тачке које се поклапају за k вредности параметра t . Права дефинисана са AB тада има степен највише $\deg A + \deg B - k$.

Доказ: Права кроз тачке $A = (P_1, Q_1, R_1)$ и $A = (P_2, Q_2, R_2)$ је дата са $\sum(P_i Q_{i+1} - Q_i P_{i+1})x = 0$. Ако је $A = B$ за $t = t_0$, тада можемо да извучемо $(t - t_0)$, и тако смањимо степен. Ово можемо урадити k пута, те је стога степен највише $\deg A + \deg A - k$.
Применом поларне трансформације добијамо дуално тврђење које гласи.

Последица 3. Нека су l_1 и l_2 две покретне праве које се поклапају у k вредности параметра t. Тада пресек ове 2 праве је степена највише $\deg l_1 + \deg l_2 - k$.

Теорема 5.2. Нека су ξ_1 и ξ_2 две праве или 2 конике. Нека се тачка A креће по ξ_1, а тачка B по ξ_2, и нека постоји пројективно пресликавање $f : A \mapsto B$. Тада је $\deg A = \deg B$.

Доказ: Из услова следи да постоји пројективна трансформација која слика A у B. Како су пројективне трансформације заправо мнозење инвертибилним матрицама следи да је f линеарна те чува степен па је deg A $\geq$ deg B . Одавде следи тврђење.

Лема 5.0.3. Нека се тачка $A = (P, Q, R)$ креће по јединичном кругу. Тада се A креће по правилу $(T^2 - U^2, 2TU, T^2 + U^2)$ за неке узајамно просте полиноме T, U. Такође важи $2\max(\deg U, \deg V) \leq \deg A$

Доказ: Из услова имамо $P^2+Q^2 = R^2$. Сада ћемо имитирати доказ карактеризације Питагориних тројки. $Q^2 = (R-P)(R+P)$. Пошто важи $(R-P, R+P) = 1$, следи да постоје T, U такви да $R - P = 2T^2$ и $R + P = 2U^2$. Како је $\deg A$ очигледно једнак $\deg\,(T^2 + U^2)$ резултат одмах следи.

Теорема 5.3. Нека се A и B крећу по коници ξ степенима a и b. Тада је $\deg AB \leq \frac{a+b}{2}$.

Доказ: Пројективном трансформацијом пошаљимо ξ у јединични круг $x^2+y^2-z^2 = 0$. Одавде следи да можемо рећи да се A и B крећу редом по правилима $(T^2 - U^2, 2TU, T^2 + U^2)$ и $(P^2 - Q^2, 2PQ, P^2 + Q^2)$. Једначина праве AB је онда дата са : $((P^2-Q^2)2TU-2PQ(T^2-U^2))x+((P^2-Q^2)(T^2+U^2)-(P^2+Q^2)(T^2-U^2))y + (2PQ(T^2 + U^2) - (P^2 + Q^2)2TU)z = 0$

$$2(PU-TQ)(PT+QU)x+2(PU-QT)(PU+QT)y+2(PU-QT)(QU-PT)z = 0$$

$$(PT + QU)x + (PU + QT)y + (QU - PT)z = 0$$

Значи AB се креће по правилу $(PT + QU, PU + QT, QU - PT)$ Нека сада E дели све три координате. Али тада $E|PT$ и $E|QU$. Из $(P, Q) = (T, U) = 1$ Следи да Б.У.О. $E|P$ и $E|U$. Али онда користећи $E|PU + QT$ имамо контрадикцију. Следи да све три координате не нестају истовременено тј. AB је покретна права. Сада је $\deg PT \leq \max(P, Q) + \max(T, U) \leq \frac{a+b}{2}$

Последица 4. Нека се A и B крећу по коници ξ и $\deg A = \deg B$. Тада је и $\deg A \geq \deg AB$

Од сада ћемо користити следећу једноставну чињеницу: Ако је полином степена s по једној промењљивој нула у $s + 1$ тачки тада је он једнак 0 полиному.

Теорема 5.4. Три покретне тачке A, B, C су увек колинеарне ако су колинеарне у бар $\deg A + \deg B + \deg C + 1$ случајева.

Доказ: Тврђење је еквивалентно са

$$\begin{vmatrix} P_A(t) & Q_A(t) & R_A(t) \\ P_B(t) & Q_B(t) & R_B(t) \\ P_C(t) & Q_C(t) & R_C(t) \end{vmatrix} = 0$$

Лако се види да је ово полином степена највише $\deg A + \deg B + \deg C$, одакле непосредно следи доказ. Поларном трансформацијом такође добијамо следеће.

Последица 5. Три покретне праве l_1, l_2, l_3 су увек конкурентне ако су конкурентне у бар $\deg l_1 + \deg l_2 + \deg l_3 + 1$ случајева.

Пример 5. Дат је троугао ΔABC са ортоцентром H и описаним кругом Γ. Права кроз H сече странице AB и AC у тачкама E и F. Претпоставимо да је K центар описане кружнице ΔAEF и да AK сече Γ у $D \neq A$. Доказати да се HK и права кроз D нормална на BC секу на Γ.

Доказ: Анимирајмо тачку E на AB. Тада је $E \mapsto F$ пројективно као перспективност. Нека су E_1, F_1 средишта од AE и AF тим редом. Тада K добијамо као $K = \infty_{\perp AB} E_1 \cap \infty_{\perp AC} F_1$. E_1 се креће степеном 1 јер је $E \mapsto E_1$ пројективно, па зато се и права $\infty \perp ABE_1$ креће степеном 1. Из наведене дискусије имамо:

$$\deg K \leq \deg \infty_{\perp AB} E_1 + \deg \infty_{\perp AC} F_1 = 2$$

Онда како када се E креће имамо да се угао између EF и AB мења као и угао (KA, AC) те је стога $E \mapsto AK \mapsto D \mapsto G$ пројективно пресликавање, па зато G има степен 2. Сада је $degGK \leq degG + degK = 4$. Због овога остаје проверити тврђење задатка у још 5 специјалних случајева, али ово је лако и тиме је доказ готов.

Сада ћемо показати примену на проблему са турнира градова који предлагачи нису успели да реше, који је зато био „отворен проблем”. Иако је мало бесмислено рећи да је отворен проблем у геометрији, до тада ником на турниру градова није било познато решење.

Прво су нам потребне дефиниције неких тачака.

- За тачку P подножје нормале на BC називамо P_a, и симетрично за остале.
- Генерализована Фојербахова тачка праве l означена је са F_l
- За две тачке P и Q дефинишемо $A_{pq} = P_b P_c \cap F_l Q_a$, симетрично за остала темена. Приметимо да је овде редослед темена P и Q важан

- Кружница описане око троугла ABC је дата са (ABC), O је центар (ABC)
- Педални круг од O је $M_aM_bM_c$ где $M_a \in BC$
- H ортоцентар, педални троугао је $H_aH_bH_c$

Теорема 5.5 (Теорема Бидва-Шевцова)**.** Нека су P, Q тачке на правој l кроз O. Заједничке тачке Z_a, Z_b, Z_c које су пресеци одговарајућих страница троуглова $A_{pq}B_{pq}C_{pq}$ и $A_{qp}B_{qp}C_{qp}$ чине троугао хомотетичан троуглу ABC где је центар хомотетије F_l.

Комисија турнира градова је дала доказ паралелности одговарајућих страница, али није специфицирала центар хомотетије. Овде дат доказ тима Србије са ТГ 2019 године којим се показује да је F_l заиста центар хомотетије.
Доказ: [Конкурентност, Суботић-Гвоздић-Цоловић]

Анимирајмо тачку P на l. Тада deg $P_a =$ deg $P_b =$ deg $P_c = 1$. Како је $P_b \mapsto P_c$ пројективно и како када је $P_b = A \neq P_c$, права P_bP_c додирује Штајнерову конику па је deg $P_bP_c = 2$. Зато је deg $A_{pq} =$ deg $P_bP_c +$ deg $F_lQ_a = 2 + 0 = 2$. Следи да важи deg $A_{pq} =$ deg $B_{pq} =$ deg $C_{pq} = 2$ Пошто је deg $Q_bQ_c = 0$ и deg $F_lP_a = 1$ следи да је deg $A_{qp} = 1$. Слично је и deg $A_{qp} =$ deg $B_{qp} =$ deg $C_{qp} = 1$. Приметимо да се B_{pq} и C_{pq} поклапају када је P на кругу, односно deg $B_{pq}C_{pq} = 2$. Коначно deg $Z_a \leq$ deg $B_{pq}C_{pq}+$deg $B_{qp}C_{qp} = 4$. За сада је степен за проверавање превелик, било би нам потребно 5 случајева да решимо задатак, а ми имамо само 2, наиме када је P на кругу.

Лема 5.0.4. $B_{pq}C_{pq} = B_{qp}C_{qp}$ важи за 2 различите позиције тачке P.

Доказ: Прво тривијално је ако је $P = Q$. Ово сада је кључан тренутак. Тврдимо да тачка Q^* дефинисана као инверз тачке Q при инверзији око описаног круга задовољава услов леме. Доказаћемо да важи $Q_a^*F_l||Q_cQ_b$ и сличне релације. Покажимо да смо готови уколико ово важи. Наравно и обрнуте релације важе, тј. $Q_aF_l||Q_c^*Q_b^*$. (ако је Q инверз од Q^* тада је Q^* инверз од Q) Али лако се види да су све тачке као A_{pq} у бесконачности, па се зато онда $B_{pq}C_{pq} = B_{qp}C_{qp}$ поклапају и једнаки су правој у бесконачности.

Лема 5.0.5. $Q_a^*F_l||Q_cQ_b$ за Q^* инверз од Q у односу на (ABC).

Доказ: Доказ ћемо извести комплексним бројевима са (ABC) јединичном кружницом и реалном правом l. тачку F ћемо звати f, и нека је Q^* у ознаци p. $f = \frac{a+b+c-abc}{2}$, $p_a = \frac{1}{2}(b+c+p-bcp)$, $q_b = \frac{1}{2}(a+c+p-acq)$, $q_c = \frac{1}{2}(a+b+p-abq)$,

$$fp_a||q_cq_b \Leftrightarrow \frac{b+c+p-bcp-(a+b+c-abc)}{a+b+q-abq-(a+c+q-acq)} \in \mathbb{R}$$

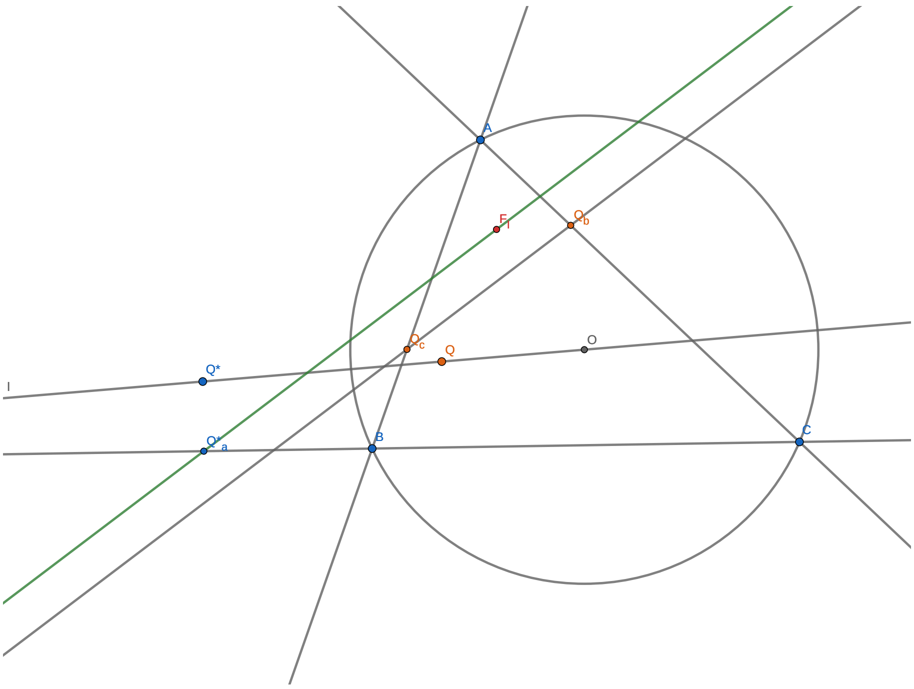
$$\Leftrightarrow \frac{(p-a)(1-bc)}{(b-c)(1-aq)} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p-a}{1-aq} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p-a}{1-aq} = \frac{p-\frac{1}{a}}{1-\frac{q}{a}}$$

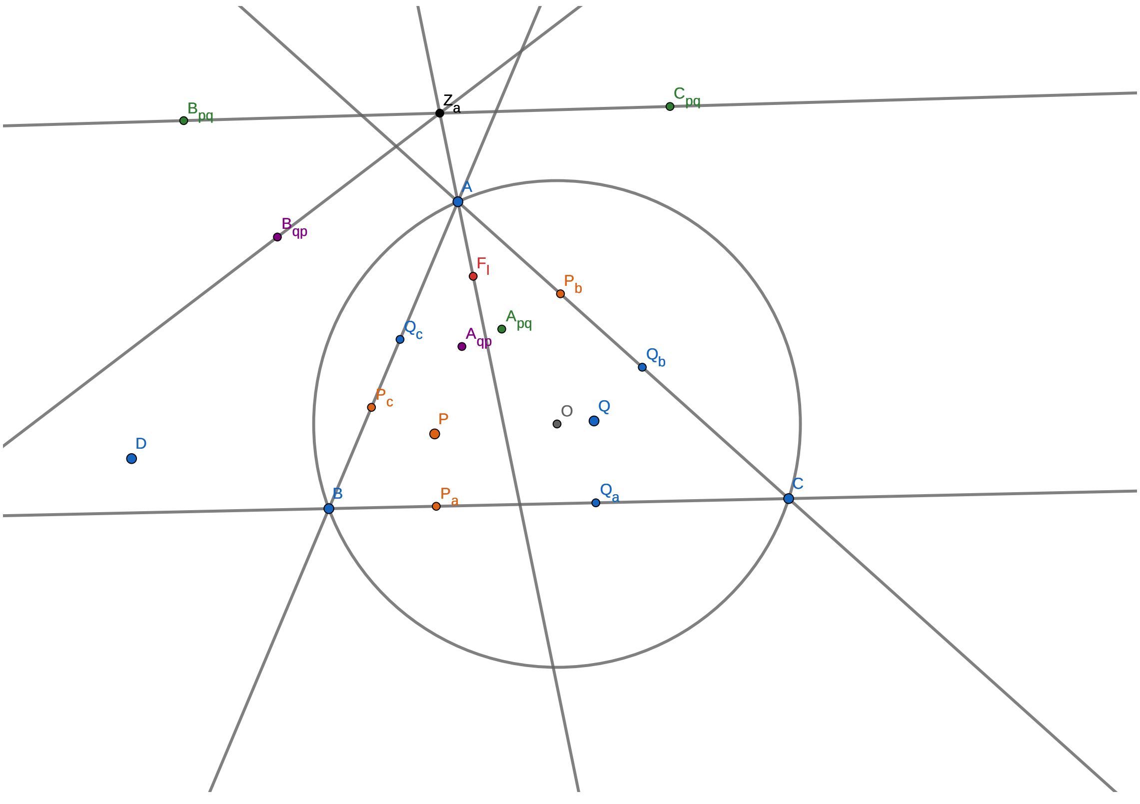
$$\Leftrightarrow (pq-1)(a^2-1) = 0$$

А пошто су p и q инверзи у односу на описани круг важи $pq = 1$. Приметимо да смо овде показали да је тачка Q^* са датом особином јединствена.



слика уз 5.0.5

Како се $B_{pq}C_{pq}$ и $B_{qp}C_{qp}$ поклапају у 2 тачке следи $\deg Z_a = 2$. Да бисмо показали да су Z_a, F_l, A колинеарне потребно је проверити $2+0+0+1 = 3$ случаја. Када је P на (ABC) важи да је $Z_a = F_l$ па тврђење тривијално важи. Остаје пронаћи још један случај. Ми га нисмо успели наћи. Зато је потребно некако заобићи ово. Фиксирајмо тачку P произвољно. Задатак је идаље јако тежак зато га олакшајмо. Како? Анимирајмо Q линеарно на l. Из претходне дискусије довољно је показати тврђење у 3 случаја. Али када је Q на кругу тврђење је тривијално те је остало наћи још једну позицију за Q. Свели смо проблем на избор тачке Q са погодним избором тачке P. У суштини, имамо слободан избор обе тачке P и Q! Али како је l насумична права то нам отежава планове. (чини се да је вероватно могуће одабрати тачке P, Q повољно те тако решити проблем) Зато сада учинимо да l буде повољна, тј. анимирајмо l! Да будемо прецизни: у трећем случају тачке P узмимо $P = O$, у трећем случају тачке Q узмимо $Q = l \cap BC$, и сада анимирамо Q на BC. (тако смо индиректно анимирали l, али не квадратно јер прелази само 180 степени) P је фиксирана али deg $Q = 1$. Као и малопре deg $Q_bQ_c = 1$ па је deg $A_{qp} = 1$, али пошто је deg $Q_aF_l = 1$ и deg $M_bM_c = 0$ следи deg $A_{qp} = 1$. Из дискусије видимо да је дег $Z_a \leq 4$ те остаје тврђење проверити у $4 + 0 + 0 + 1 = 5$ случајева. За $l = OM_a, OM_b, OM_c$ тврђење је тривијално. За последња 2 случаја нека $l = OB, OC$. Фокусирајмо се на слухај $l = OB$. Покажимо $B_{qp}C_{qp} = AC$. Ово важи зато што $H_b = F_l = C_{qp}$ и $F_lM_b = AC$ па је B_{qp} на AC. Али сада смо готови јер се из $B_{qp}C_{qp} = AC$ добија да се Z_a налази на AC, а $F_lA = AC$. (да смо желели бити мало прецизнији, могли смо причати о лимесима и исти доказ би радио). Овим смо показали да тврђење важи када анимирамо Q на BC, те смо показали 3 случаја када анимирамо Q, те смо онда показали 3 случаја тачке P и тиме је доказ готов.



Bidva-Shevtsov

6

Кубике 1, теорема Кајлија и Бахараха

Дефиниција 6.0.1. Алгебарска крива је геометријско место тачака координата (x, y) које задовољавају $F(x, y) = 0$, где је F полином. Степен алгебарске криве је највећи степен датог полинома.

Као што је већ напоменуто, можемо хомогенизовати F као $P(x, y, z) = z^n F(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$. Кубике су алгебарске криве степена 3.

Дефиниција 6.0.2. Кажемо да је алгебарска крива дегенерисана уколико је одговарајући полином растављив. Специјално, кубика је дегенерисана уколико има облик $QL = 0$ где је Q коника а L права (и Q може бити дегенерисана). Ова кубика је унија праве и конике.

Све време радимо без сингуларних тачака.

Теорема 6.1 (Теорема Кајлија и Бахараха)**.** Нека се 2 кубике секу у 9 тачака које се налазе у општој позицији. Тада било која кубика која пролази кроз 8 тачака, пролази и кроз девету.

Напомена 1. И у специјалним случајевима можемо примењивати 6.1. Заиста уколико знамо да тврђење важи за произвољан положај тачака које су у општој позицији, можемо прићи произвољно близу датој специјалној конфигурацији.

Теорема 6.2 (Адитивна група на кубици)**.** Нека су ϑ кубика и несингуларна тачка O на њој дати. За 2 произвољне несингуларне тачке A и B нађемо трећи пресек са кубиком и назовима га C. Након овога, нека је трећи пресек OC са кубиком такозвана сума тачака A и B у ознаци $A + B$. Са $-X$ дефинишемо пресек OX са кубиком, и за $A + A$ узимамо тангенту на кубику у тачки A.

Теорема 6.3. Овако дефинисано сабирање на кубици чини Абелову групу (без сингуларних тачака).

Доказ: Очигледно је $A+B=B+A$, $A,B \in \vartheta$ тада и $A+B \in \vartheta$, O је идентитет, и постоји инверз $-X$. Покажимо асоцијативност тј. $(A+B)+C = A+(B+C)$. Користићемо сада 6.1. За праву кроз тачке P,Q,R на кубици користићемо ознаку $L(P,Q,R)$. Нека су сада дате тачке у општој позицији. Посматрајмо две кубике ϑ и $L(B+C,O,-B-C) \times L(A,B,-A-B) \times L(A+B,C,-(A+B)-C)$. За трећу кубику узмимо $L(A,B+C,-A-(B+C)) \times L(A+B,O,-A-B) \times L(B,C,-B-C)$. Како трећа кубика пролази кроз 8 тачака мора и кроз девету. Али пошто праве $L(A+B,O,-A-B)$ и $L(B,C,-B-C)$ већ имају по три пресека са кубиком, и $A, B+C, -A-(B+C)$ су три различите тачке, следи да је $-A-(B+C) = -(A+B)-C$ чиме је доказ завршен.

Покажимо да ова структура не зависи од избора O (нуле). Дефинишимо операцију $+'$ са нулом O'. Сада ћемо представити $+'$ преко $+$. Приметимо да је операција $+'$ еквивалентна са узимањем инверза разлике $O'-(A+B)$, што нам даје $A +' B = A+B-O'$.

Теорема 6.4. За било које три тачке A,B,C кубике ϑ које леже на правој l, збир $A+B+C$ не зависи од избора l.

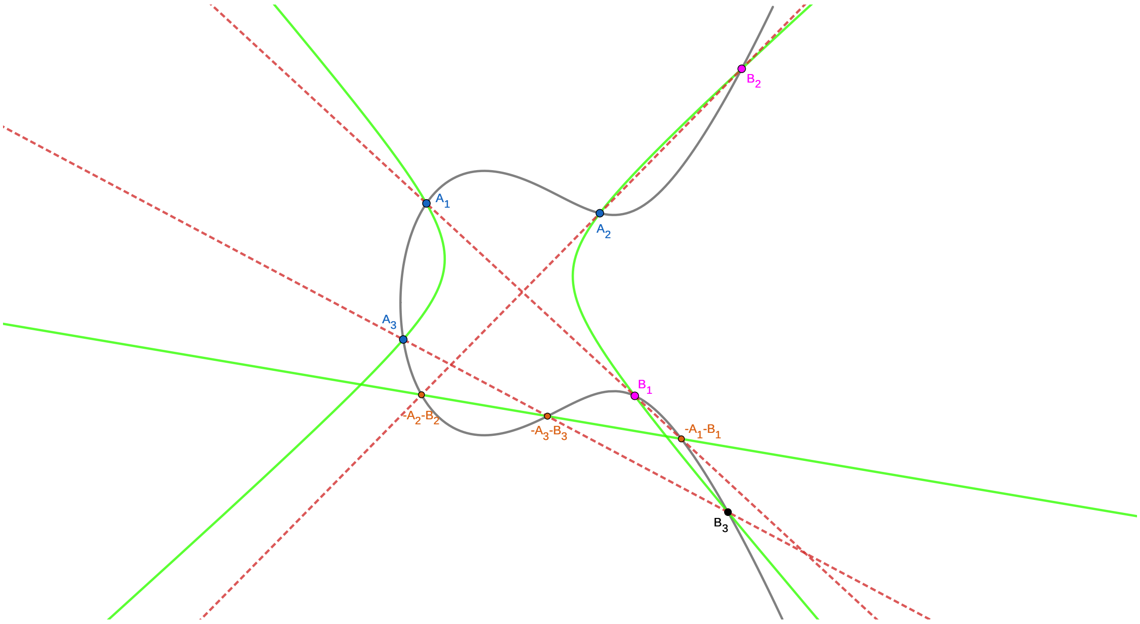
Доказ: Приметимо да је овај збир једнак $2O$ односно ϑ пресек тангента на кубику у O.

Теорема 6.5. Ако је O превојна тачка тада је $A+B+C=O$ ако и само ако A,B,C колинеарне.

Доказ: Смер само ако одмах следи, а за смер ако, приметимо да током сабирања $A+B$ и C трећи пресек мора бити тачка O, јер једина права кроз O која сече ϑ у O је заправо OO.

Теорема 6.6. Нека је ϑ несингуларна кубика и O је њена превојна тачка. Тада је збир шест тачака O ако и само ако се оне налазе на коници.

Доказ: Покажимо прво ако је збир O да онда следи да су оне на коници. Нека су тачке дате са $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ и $A_1+A_2+A_3+B_1+B_2+B_3 = 0$. Познато је да постоји јединствена коника кроз 5 тачака и нека је ξ коника кроз A_1, A_2, A_3, B_1, B_2. Из услова имамо $L(-A_1-B_1, -A_2-B_2, -A_3-B_3)$. Сада ћемо применити 6.1. Нека су ϑ и $L(A_1,B_1,-A_1-B_1) \times L(A_2,B_2,-A_2-B_2) \times L(A_3,B_3,-A_3-B_3)$ две кубике, и нека је трећа кубика $\xi \times L(-A_1-B_1,-A_2-B_2,-A_3-B_3)$. Како трећа кубика пролази кроз 8 тачака пролази и кроз 9, а пошто права $L(-A_1-B_1,-A_2-B_2,-A_3-B_3)$ има тачно 3 заједничке тачке следи да $B_3 \in \xi$. Покажимо сада другу страну, тј. ако леже на коници онда им



конике имају суму нула, 6.6

је сума нула. Посматрајмо тачку X такву да је $A_1 + A_2 + A_3 + B_1 + B_2 + X = 0$. Тада $X \in \xi$ где је ξ коника кроз A_1, A_2, A_3, B_1, B_2. Али пошто се кубика и коника секу у тачно 6 тачака (бројећи и преклапања) следи $X = B_3$ и тиме је доказ завршен.

Дефиниција 6.0.3. Пројекцију са центром у несингуларној тачки $P \in \vartheta$, дефинишемо као инволуцију S_P која тачку $X \in \vartheta$ слика у други пресек PX са ϑ.

Покажимо сада неколико занимљивих чињеница.

Теорема 6.7. Дате су P, P' несингуларне тачке на ϑ. Тада $S_P S_{P'} = S_{P'} S_P$ ако и само ако

1. Тангенте у P, P' се секу на кубици
2. За свако $X \in \vartheta$ важи $S_P S_{P'} S_P S_{P'}(X) = X$

Доказ:

1. Показаћемо уколико комутативност важи да се тангенте секу, други смер је сличан. Из колинеарности имамо $X + P + S_P(X) = 0$ и сл. једнакости. Сабирајући све једнакости тог типа добијамо $2P = 2P'$.
2. Лако следи из особина пројекције.

Теорема 6.8. Нека тачке $P, C, D \in \vartheta$. За произвољну тачку X посматрамо $Y = S_P(X)$. Нека произвољна коника која пролази кроз C, D, X, Y сече ϑ у тачкама Z, T. Тада су све праве ZT конкурентне.

Доказ: Нека је O превојна тачка. Тада је $Y = -X - P$, а пошто C, D, X, Y, Z, T леже на коници имамо $C+D+X+Y+Z+T = 0$. Даље је $-Z-T = C+D-P$ што не зависи од X. Одавде следи да права ZT увек пролази кроз тачку $C + D - P$ и тиме је доказ завршен.

Дефиниција 6.0.4. Нека је $C = O + O$. Тада транслациону инволуцију дефинишемо као пресликавање $X \mapsto X + C$ за $X \in \vartheta$.

Дефиниција 6.0.5. Нека су I, J две комплексне бесконачне тачке дате са хомогеним координатама $(1, i, 0)$ и $(1, -i, 0)$. Тада I, J називамо кружним тачкама.

Видимо сада да сваки круг пролази кроз ове две тачке. Заиста, једначина круга је $(x - za)^2 + (y - zb)^2 = r^2z^2$ за неке комплексне бројеве a, b, c, одакле се лако види. Такође важи да једина коника која пролази кроз кружне тачке је заправо круг.

Дефиниција 6.0.6. Кубику зовемо кружном ако пролази кроз овако дефинисане I и J.

Теорема 6.9. Нека су P и Q тачке на кружној кубици ϑ. Права l_P пролази кроз P и сече ϑ у тачкама X, Y, док l_2 пролази кроз Q и сече кубику у Z, T. Тада су X, Y, Z, T концикличне (за сваки избор l_1 и l_2) ако и само ако је PQ паралелно са асимптотом.

Доказ: Нека је M некружна тачка у бесконачности која припада ϑ. Ако је PQ паралелно са асимптотом тада $P+Q+M = O$. Такође важи $I+J+M = O$ Даље имамо да $X+Y+P = O$ и $Z+T+Q = O$. Следи да је $X+Y+Z+T+I+J = -P-Q+I+J = M+I+J = O$ одакле добијамо да X, Y, Z, T, I, J леже на коници, али ова коника је круг јер пролази кроз кружне тачке и тиме је доказ завршен.

7

Кубике 2, Изоптичке кубике

7.1 Изогоналност у четвороуглу

Дефиниција 7.1.1. Ако су праве OX и OX' изогоналне у углу YOY' тада пишемо $I_X(XX', YY')$

Дефиниција 7.1.2. Нека је дат четвороугао $ABA'B'$. За две тачке X и X' говоримо да су изогонални коњугати у односу на четвороугао $ABA'B'$ ако је задовољено $I_A(XX', BB')$, $I'_A(XX', BB')$, $I_B(XX', AA')$. (Познато је да 3 имплицирају и четири)

Дефиниција 7.1.3. Геометријско место тачака таквих да имају изогоналног коњугата у четвороуглу $ABA'B'$ означавамо са $I(ABA'B')$.

Сада неколико битних теорема које ће нам помоћи.

Теорема 7.1. Овде радимо са оријентисаним угловима.

1. $\angle AXB = \angle CXD$
2. $I_X(AA', BB')$
3. Пројекције из X на странице четвороугла леже на кругу (на истом том кругу леже и пројекције из X')

Доказ: Сва ова тврђења су позната.

Теорема 7.2. C и C' су изогонални коњугати у $ABA'B'$ ако и само су A и A' изогонални коњугати у односу на $BCB'C'$.

Доказ: Доказ одмах следи из 7.7, али могуће је и лаким рачуном углова доћи до истог закључка.

7.2 Изоцикличне инволуције

Дефиниција 7.2.1. Нека су дате тачке A, B, C, D. Са $f_{AB,CD}$ назовимо функцију која слика тачку X у Y, пресек кругова (ABX) и CDX.

Теорема 7.3 (Клифорд)**.** Важи да је $f_{AB,CD}f_{BC,DA} = f_{BC,DA}f_{AB,CD}$.

Доказ: Тврђење је инверзни дуал Микелове теореме о комплетним четвороугловима, где се инверзија примењује у темену четвороугла.

Дефиниција 7.2.2. 4-орбитом тачке X у односу на четвороугао $ABA'B'$ зовемо четворку тачака: $X, Y = f_{AB,A'B'}(X), Y' = f_{AB',A'B}(X), X = f_{AB,A'B'}(Y')$

7.3 Инверзија+рефлексија

Дефиниција 7.3.1. Када кажемо инверзија+рефлексија са центром O мислимо да композицију инверзије у O и пресликавања преко фиксне праве l која пролази кроз O. За дате тачке X, X', Y, Y' означимо са $\phi_{XYX'Y'}$ јединстену инверзију+рефклесију која мења тачке $X \leftrightarrow X'$ и $Y \leftrightarrow Y'$.

$\phi_{ABA'B'}$ је заправо композиција инверзије у Микеловој тачки четвороугла $ABA'B'$ полупречника $\sqrt{MA \times MB}$ укомпонована са пресликавањем преко симетрале угла $\angle AMA'$.

Теорема 7.4. $\phi_{ABA^*B^*}(C) = f_{AB,A^*B^*}f_{BA^*,B^*A}$

Доказ: За произвољно C нека је $C^* = f_{AB,A^*B^*}(C)$ и $D = \phi_{ABA^*B^*}(C)$. Показаћемо да су A, B^*, D, C^* на кругу, што ће завршити задатак јер онда симетрично добијамо да су A^*, B, D, C^* на кругу.

$$\angle(AD, DB^*) = \angle(AD, DC) + \angle(DC, DB^*) = \angle(AB, BC) + \angle(CA^*, A^*B^*)$$

$$\angle(AC^*, C^*B^*) = \angle(AC^*, C^*M) + \angle(MC^*, C^*B^*) = \angle(CA^*, A^*M) + \angle(MB, BC)$$

$$\angle(AD, DB^*)\angle(AC^*, C^*B^*) = \angle(AB, BC)+\angle(CA^*, A^*B^*)+\angle(A^*M, CA^*)+\angle(BC, MB) = \angle(AB, MB) + \angle(A^*M, A^*B^*) = 0$$

7.4 Хармонијске шесторке

Дефиниција 7.4.1. Шесторку тачака $(A, A'; B, B'; C, C')$ називамо хармонијском ако :

$$\frac{a - b'}{b' - c}\frac{c - a'}{a' - b}\frac{b - c'}{c' - a} = -1$$

Дефиниција 7.4.2. Хармонијску шесторку зовемо регуларном ако и само ако се средишта од AA', BB', CC' сва међусобно разликују. Где су a, a' итд. одговарајући комплексни бројеви.

Очигледно је да постоји јединствена тачка C' тако да $(A, A'; B, B'; C, C')$ буде хармонијска шесторка.

Теорема 7.5. Шесторка тачака $(A, A'; B, B'; C, C')$ је хармонијска ако и само ако је $\phi_{ABA'B'}(C) = C'$.

Доказ: Нека је M координатни почетак и симетрала угла $\angle AMA'$ реална оса. Тада је $\phi_{ABA'B'}$ еквивалентно са $a \mapsto \frac{1}{a}$. Али сада смо готови јер је лако проверити да ако је $\phi_{ABA'B'}(C) = C'$ онда је $(A, A'; B, B'; C, C')$ хармонијска. Други смер следи из првог и јединствености хармонијске шесторке.

Ово тврђење нам омогућава да све хармонијске шесторке уствари видимо као тројке парова инверза при $\phi_{ABA'B'}$.

Теорема 7.6. Ако су C, C' изогонални коњугати у $ABA'B'$ онда важи $(A, A'; B, B'; C, C') = -1$. Другим речима ако је шесторка изогонална онда је и хармонијска.

Доказ ове теореме ћемо изоставити иако је само рачун углова.

Теорема 7.7. Ако су средишта од AA', BB', CC' колинеарна и важи да је $(A, A'; B, B'; C, C')$ регуларна хармонијска шесторка, онда је и изогонална.

Доказ: Изогоналност је еквивалентна са $I_C(ABA'B')$ што је даље еквивалентно са

$$\frac{\frac{1}{c} - a}{\frac{1}{b} - a} \frac{c - a}{b - a} \in \mathbb{R}$$

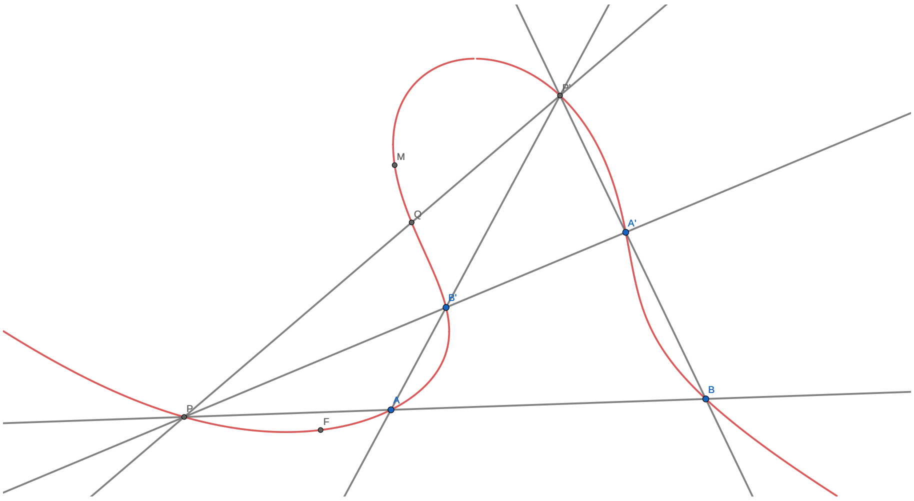
$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{a} + a - \frac{1}{c} - c}{\frac{1}{a} + a - \frac{1}{b} - b} \in \mathbb{R}$$

што је еквивалентно са колинеарношћу средишта и тиме је доказ завршен.

7.5 Изоптичке кубике

Сада можемо да кренемо да причамо о $I(ABA'B')$. Покажимо прво да је ово заправо кубика.

Теорема 7.8. $I(ABA'B')$ је кубна крива.



Изоптичка кубика

Доказ: Радимо у комплексним бројевима. Геометријско место тачака је очигледно дато следећом једначином

$$\frac{\frac{x-a}{x-b}}{\left|\frac{x-a}{x-b}\right|} : \frac{\frac{x-b'}{x-a'}}{\left|\frac{x-b'}{x-a'}\right|} \in \mathbb{R}$$

што се своди на кубну једначину по x. Приметимо да су чланови код $\overline{x}x^2$ и $\overline{x}^2x$ нула ако и само је $a + a' = b + b'$ тј. четвороугао је паралелограм. У случају паралелограма ова кубика је дегенерисана на праву у бесконачности и хиперболу.

Ове криве зовемо изоптичке или изогоналне кубике.

Сада ћемо проучити неке особине $I(ABA'B')$.

Теорема 7.9. На $I(ABA'B')$ се налазе следеће тачке:

1. A, B, A', B'
2. $AB \cap A'B' = P, AB' \cap A'B = P'$,
3. M (Микелова тачка)
4. подножје нормале из пресека дијагонала на PP'
5. тачка T таква да су $\Delta TAB'$ и $\Delta TA'B$ слични али супротно оријентисани

Доказ:

1. Следи из дефиниције
2. Следи из 7.12
3. Следи из $I_M(ABA'B')$
4. Интересантна вежба за читаоца
5. Следи из $I_T(ABA'B')$

Теорема 7.10. Ако $X \in I(ABA'B')$ тада $Y = \phi_{ABA'B'}(X) \in I(ABA'B')$. Такође све тако добијене праве XY пролазе кроз фиксну тачку.

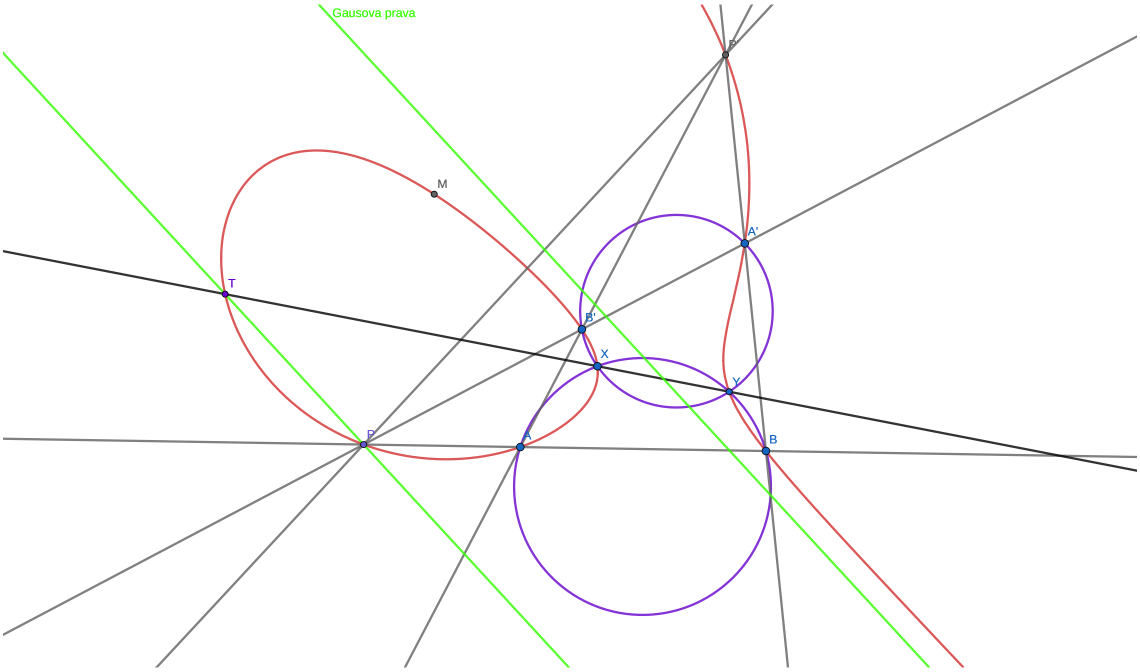
Доказ: Следи из 7.1 и рачуна углова али овде представљамо доказ помоћу адитивне групе. Нека (ABX) сече кубику шести пут у тачки Y^*. Тада важи $Y^* = -A - B - I - J - X$ али како је $A + B = A' + B'$ (зато што $AB \cap A'B' \in I(ABA'B')$) видимо да су A', B, X, Y^* на кругу и тиме је доказ завршен. За други део довољно је напоменути да је $Y + X = -A - B - I - J$. Овде смо користили да је $I(ABA'B')$ изокружна али то ћемо касније показати.

Теорема 7.11. Свака права XY из 7.10 пролази кроз тачку T (дефинисану у 7.9). Такође PT где је $AB \cap A'B' = P$ је паралелно са Гаусовом правом.

Доказ: Први део се може наћи у [8]. Покажимо сада други део користећи адициону групу. Довољно је показати да су P, T и $-I - J$ колинеарне. Другим речима да је $P + T = I + J$. Као и раније $X + Y = -A - B - I - J$, а лако важе и $P = -A - B$, $T + X + Y = O$. Користећи све наведено добијамо

$$P + T = -A - B - X - Y = -A - B + A + B + I + J = I + J$$

Одакле следи твђење.



слика уз 7.10,7.11

Теорема 7.12. $I(ABA'B')$ је геометријско место тачака X за које средишта дужи XX' леже на Гаусовој правој, где је $X' = \phi_{ABA'B'}$.

Доказ: Познато је да су тачке X, X' фокуси неке уписане конике и да центар те конике лежи на Гаусовој правој. Друга страна следи из 7.7.

Теорема 7.13. Нека су (C, C') и (D, D') парови изогоналних коњугата у четвороуглу $ABA'B'$. Тада се и $I(ABA'B')$ поклапа са $I(CDC'D')$, чак шта више сваки пар изогоналних коњугата на једној кубици, јесте пар изогоналних коњугата на другој кубици.

Доказ: Тврђење лако следи из 7.7 и 7.2.

Из претходног смо видели да је свакој изоптичкој кубици могуће доделити Микелову тачку M као и Гаусову праву. Сада ћемо експлицитно наћи једначину изоптичких кубика.

Теорема 7.14. Постоји координатни систем у коме изогонална кубика узима форму $(x^2 + y^2)(x + A) = Bx + Cy$.

Доказ: Нека је M Микелова тачка ове кубике, и нека је $ABA'B'$ четвороугао коме она одговара. Поставимо симетралу угла AMA' за y осу, и M у нулу. Тада је $\phi_{ABA'B'}$ дато са $(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$. То што средиште лежи на Гаусовој правој $2Ax + 2By = 1$ је еквивалентно са

$$Ax(x^2 + y^2 + 1) + By(x^2 + y^2 - 1) = x^2 + y^2$$
$$(Ax + By + 1)(x^2 + y^2) = -Ax + By$$

И сада још остаје применити ротацију која шаље праву $Ax + By + 1 = 0$ у вертикалу.

Последица 6. Свака изогонална кубика је кружна.

Теорема 7.15. Кружна кубика је изоптичка ако и само ако се тангенте у кружним тачкама секу на кубици. Ако се секу на кубици, онда пролазе кроз Микелову тачку M.

Доказ: Поставимо координатни систем тако да је не-кружна бесконачна тачка кубике на y оси. Кружна кубика тада има облик $(x^2 + y^2)(x + A) = Bx + Cy + D$. Али сада се лако види да тангенте у кружним тачкама пролазе кроз координатни почетак.

Теорема 7.16. За све парове (X, X') изогоналних коњугата на $I(ABA'B')$ важи да је $X - X' = K$ где је K таква да је $K + K = O$ односно K је поретка 2.

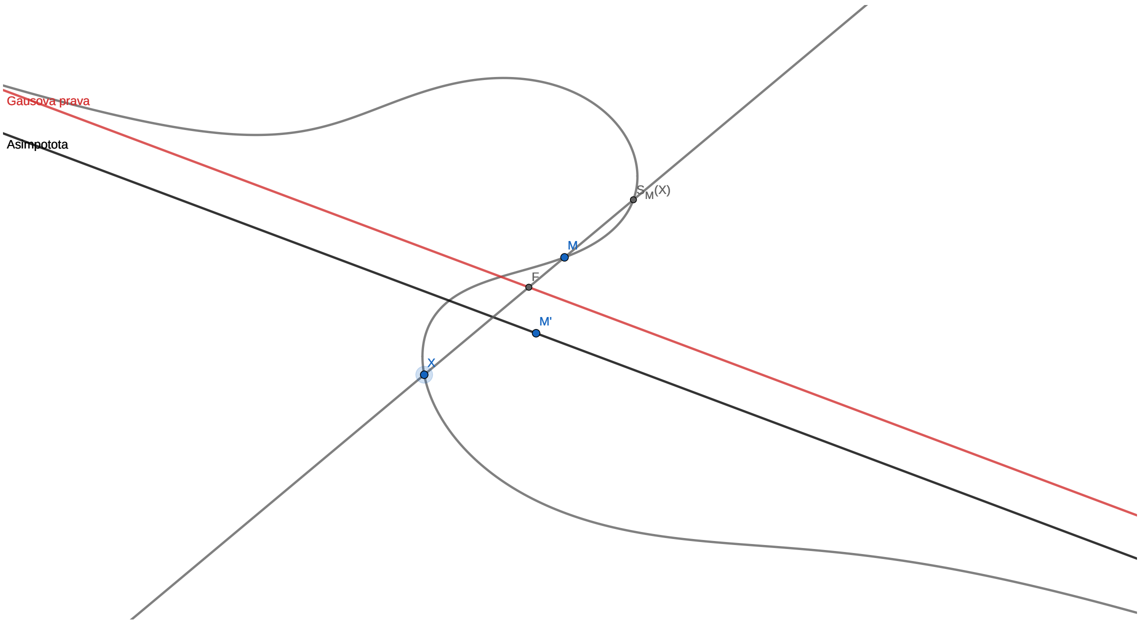
Доказ: Лако се види да ако су X, X' и Y, Y' парови изогоналних коњугата тада су и $XY \cap X'Y'$ и $XY' \cap YX'$ изогнални коњугати. Одатле добијамо $X + Y = X' + Y'$ и $X + Y' = X' + Y$ одакле закључак следи.

Теорема 7.17. Важе следеће особине Гаусове праве и асимптоте $I(ABA'B')$:

1. асимптота је паралелна са Гаусовом правом
2. асимптота пролази кроз рефлексију од M преко Гаусове праве
3. $\forall x \in I(ABA'B')$ средиште дужи $XS_M(X)$ лежи на Гаусовој правој

Доказ: У 1. и 2. користићемо 7.14.

1. Асимптота је тангента у бесконачној реалној тачки ∞_G, те довољно је показати да и Гаусова права пролази кроз њу, али ово је лако јер је $\infty_G = (0, 1, 0)$, а једначина Гаусове праве је $x + \frac{zA}{2} = 0$
2. Једначина тангенте на криву $P(x, y, z)$ у тачки (a, b, c) је дата са
$$\Sigma_{cyc} x P'_x(a, b, c) = 0$$
. Зато је једначина асимптоте $x + zA = 0$. Приметимо да је једначина Гаусове праве $x + z\frac{A}{2} = 0$ одакле резултат лако следи.
3. Следи из $S_M(X) = S_{\infty_G}(X')$ и тога да је средиште од $X'X$ на Гаусовој правој.



слика уз 7.17

8

Кубике 3, кубике квартета

Дефиниција 8.0.1. Нека су дате тачке X, Y, Z. Са ϕ_X означимо композицију инверзије и пресликавања преко угла X која мења тачке Y и Z. Слично дефинишемо и ϕ_Y, ϕ_Z.

Теорема 8.1. Претходно дефинисане трансформација комутирају једна са другом, као и са изогоналном коњугацијом.

Доказ: Како су све трансформације пројективне следи да је довољно проверити тврђење у 3 случаја, али се ово лако проверава за центре приписаних кругова те је доказ готов.

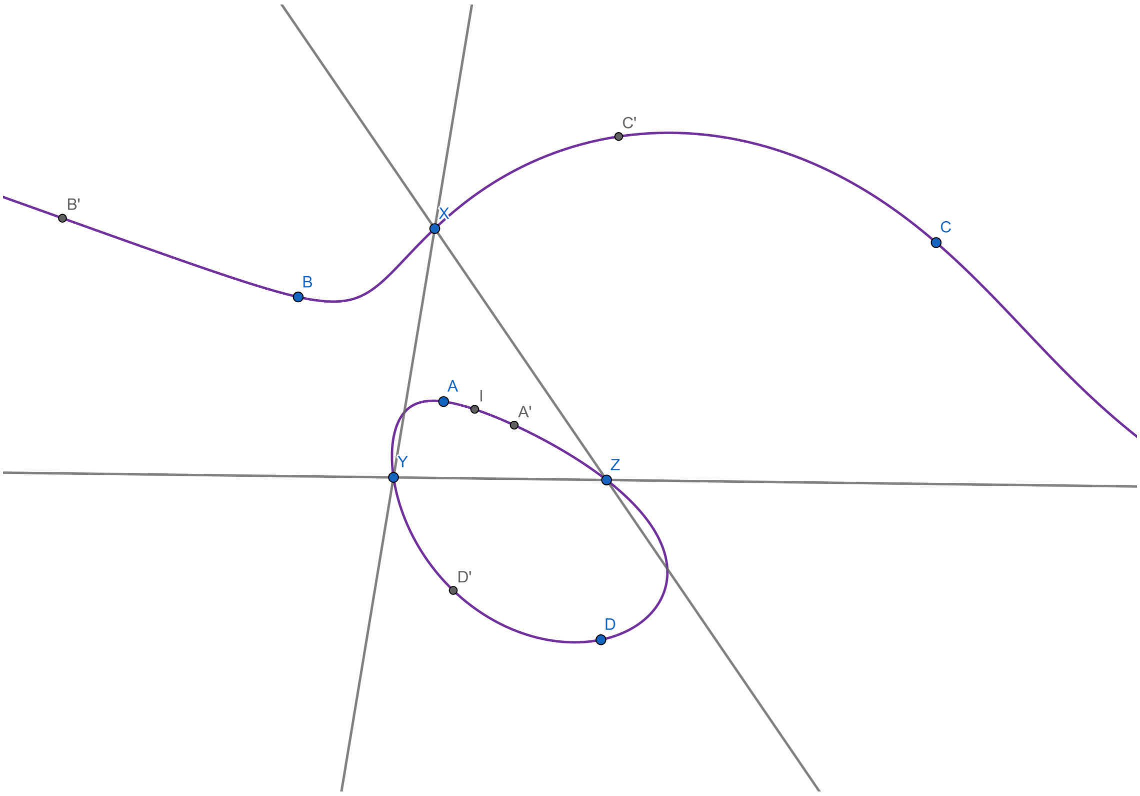
Дефиниција 8.0.2. Нека је A произвољна тачка, $B = \phi_Z(A)$, $C = \phi_Y(A)$ $D = \phi_X(A)$. Тада четворку тачака (A, B, C, D) зовемо квартетом у односу на троугао ΔXYZ.

Покажимо сада јако битну теорему.

Теорема 8.2. Дат је троугао ΔABC и тачка T. Геометријско место тачака X таквих да XX', где је X' изогонални коњугат тачке X у ΔABC, пролази кроз T је кубика Υ која пролази кроз:

- A, B, C
- центре приписаних кругова
- центар уписаног круга
- T', изогонални коњугат од T

Чак шта више, ова кубика је кружна ако и само ако је T бесконачна тачка.



Кубика квартета

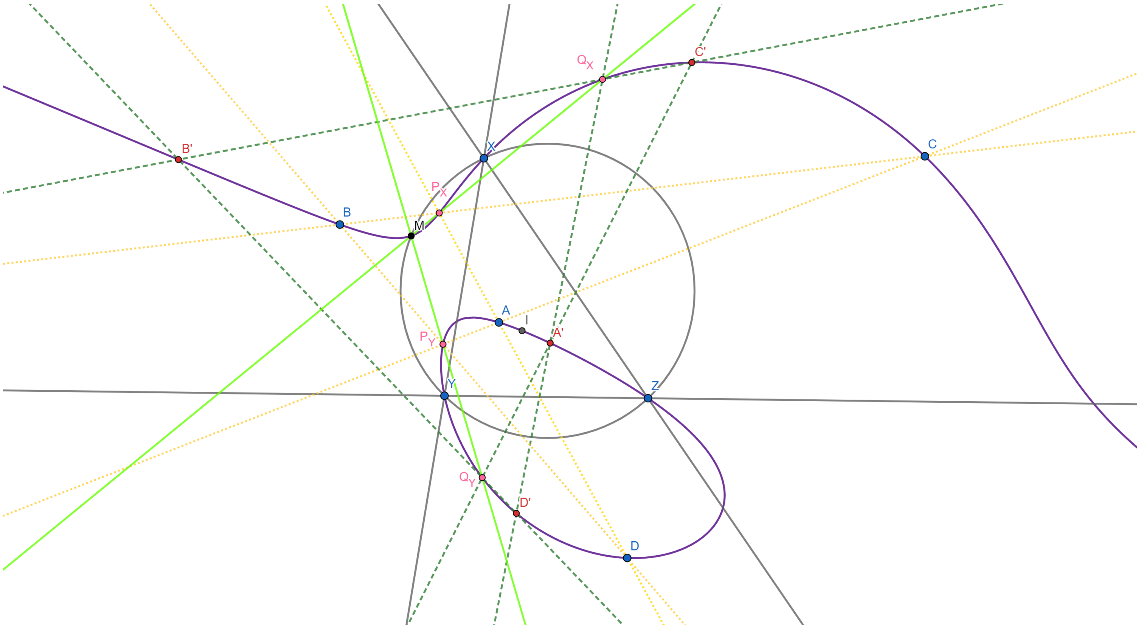
Доказ: Радимо у барицентричним координатама са референтним троуглом ABC. Познато је да је изогонални коњугат тачке $P = (x, y, z)$ дат са $P' = (\frac{a^2}{x}, \frac{b^2}{y}, \frac{c^2}{z})$. Колинеарност тачака T, P, P' је еквивалентна са:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{a^2}{x} & \frac{b^2}{y} & \frac{c^2}{z} \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0$$

Лаком провером видимо да је ово кубика, и да дате тачке леже на њој. Покажимо други део. Ако је тачка T у бесконачности, она се налази на правој у бесконачности, а како су I и J изогонални коњугати у троуглу ABC, видимо да тврђење важи. Са друге стране ако су I, J на кубици тада се T на правој IJ одакле следи друга страна.

Теорема 8.3. Важи следеће:

- четворка изогоналних тачака (A', B', C', D') је такође квартет
- праве AA',BB',CC',DD' су паралелне



Слика уз 8.4, тачка на кругу

- тачке $A, B, C, D, A', B', C', D', X, Y, Z, I, J$ се налаже на кружној кубици
- $A + A = B + B = C + C = D + D$

Доказ:

- Следи из комутативности композиције ϕ_X и изогоналне коњугације
- Лако следи из рачуна углова
- Из претходне ставке и 8.2
- Очигледно важи $A + A' = D + D'$, такође пошто су X, A, D' и X, D, A' колинеарне имамо $A + D' = A' + D$ и зато је $2A = 2D$, слично и за остале.

Теорема 8.4. Нека је (A, B, C, D) квартет и (A', B', C', D') његов изогонални квартет, у односу на ΔXYZ. Нека је $P_X = AD \cap BC$,$P_Y = AC \cap BD$, $P_Z = AB \cap CD$. Тачке $Q_X.Q_Y, Q_Z$ су слично дефинисане помоћу A', B', C', D'. Тада важи:

1. Праве P_XQ_X, P_YQ_Y, P_ZQ_Z се секу у једној тачки, и она се налази на кругу описаном око ΔXYZ.
2. P_XQ_Y, Q_XP_Y и XY су конкурентне у тачки Z', и важи $ZZ'||AA'$.

Доказ:

1. Назовимо кубику квартета Υ. Покажимо да $P_X \in \Upsilon$. Приметимо следећи низ једнакости:

$$\begin{aligned} A + D' &= B' + C \\ A + (A + D') &= (B' + A) + C \\ A + A' + D &= B + A' + C \\ A + D &= B + C \end{aligned}$$

   Што је еквивалентно са тим да $P_X \in \Upsilon$. Даље нека је нула превојна тачка. Тада важи $P_X + Q_X = A + A' + D + D' = -2K$ где је K бесконачна некружна тачка кубике. Како је овај збир симетричан, остаје још показати да се тачка $-2K$ налази на (XYZ), али ово је лако јер је ова тачка заправо изогонални коњугат од K.

2. Приметимо следеће:

$$\begin{aligned} A + D + A' + C' &= (A + D) + (A' + C') = P_X + Q_Y \\ A + D + A' + C' &= A + A' + C + D' = (A' + D') + (A + C) = Q_X + P_Y \\ A + D + A' + C' &= (A + A') + (D + C') = -K - Z \\ A + D + A' + C' &= (A' + D) + (A + C') = X + Y \end{aligned}$$

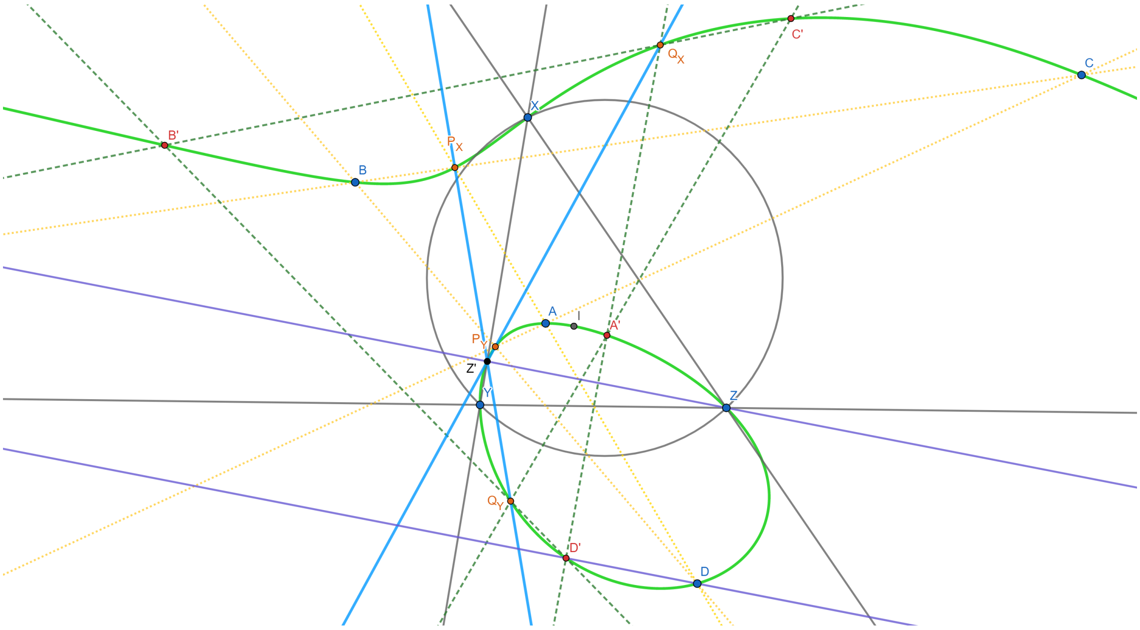
   Из ових једначина видимо конкурентност, али и такође да $Z' + K + Z = O$ што је еквивалентно са $ZZ'||AA'$ чиме је доказ завршен.

Теорема 8.5. Нека су A_1, A_2 тачке такве да $A_1A_1'||A_2A_2'$ где су примом означени њихови изогонални коњугати у односу на ΔXYZ. Тада су праве $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2$ конкурентне (где су дате тачке одговарајући квартети).

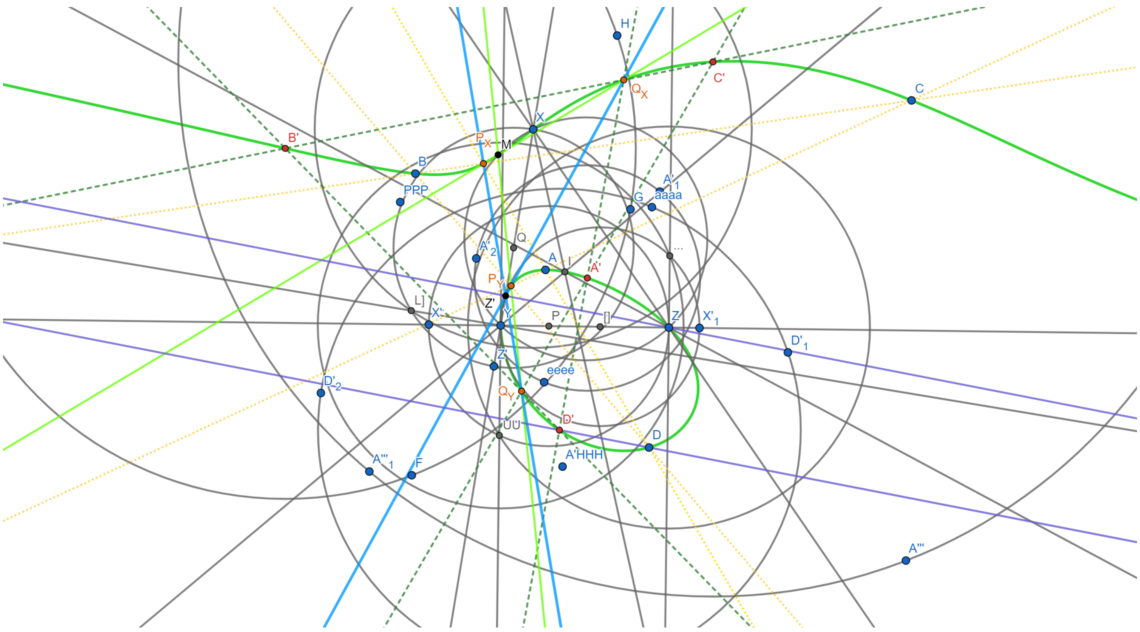
Доказ: Приметимо да све тачке леже на истој кубици квартета Υ. Покажимо да је $A_1 + A_2 = D_1 + D_2$ и доказ ће следити из симетрије. Ако је K бесконачна некружна тачка на Υ, приметимо следеће:

$$\begin{aligned} -K - X &= -X - K \\ A_1 + A_1' + A_2 + D_2' &= D_1 + A_1' + D_2 + D_2' \\ A_1 + A_2 &= D_1 + D_2 \end{aligned}$$

Чиме је доказ завршен.



Други део 8.4



Конструкција кубике квартета

9

Закључак

Кроз овај рад смо видели неке очекиване као и неочекиване примене кубика, коника, пројективних транфсормација, померања тачака.. Видели смо њихови лепоту, једноставност као и сложеност, те да свако ко жели да научи, заиста и може уз мало труда, рада и воље. Овом приликом бих се захвалио професору др Луки Милићевићу који је издвојио време да прегледа рад, али првенствено зато што је својим предавањима, кроз четири године, успео да продуби моју љубав према математици.

Литература

[1] Evan Chen, *Euclidean geometry in mathematical olympiads*, USA, MAA Press, 2016.

[2] A. V. Akopyan, A. A. Zaslavsky, *Geometry of Conics*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

[3] F. Klein, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*, Dover Publications, Inc., 2004

[4] H. S. M. Coxeter, *Projective Geometry*, Second edition, Springer-Verlag, 1994.

[5] `http://www.fen.bilkent.edu.tr/franz/ag05/ag-07.pdf`

[6] Vladyslav Zveryk *Method of moving points.*

[7] `https://www.turgor.ru/lktg/2019/6-Inversions%20of%20the%20Feuerbach%20point/6-1en-sol.pdf`

[8] `https://drive.google.com/file/d/1-87ZwtprcXe6gFfwusedS2nSPS2LR9fZ/view`

[9] `https://mathworld.wolfram.com/PivotalIsogonalCubic.html`

[10] `https://arxiv.org/pdf/1912.08296.pdf`